

Обработка сигналов

Лекция 2. Гармонический анализ сигналов

Прикладная математика и информатика

4 курс · 01.03.02 · ИИ и системная аналитика

Маршрут блока «Сигналы и спектры»

- **Лекция 1:** сигнал, АЦП, время и спектр — интуиция.
- **Лекция 2 (сегодня):** откуда берётся спектр — гармонический анализ.
- **Лекция 3:** дискретное преобразование Фурье (ДПФ).
- **Лекция 4:** БПФ и практический спектральный анализ (окна, разрешение).
- **Лекция 5:** спектры радио и модуляция, комплексная огибающая (I/Q).
- **В конце лекции:** минимальная задача ЦОС — восстановление параметров сигнала по отсчётам.

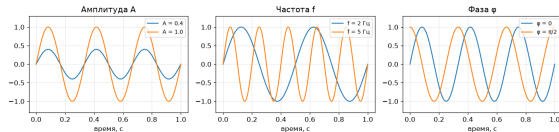
Цели лекции 2

К концу лекции вы сможете:

- 1 объяснить, почему **синусоиду** называют «кирпичом» сигнала;
- 2 собрать периодический сигнал из **ряда Фурье**;
- 3 читать **амплитудный** и **фазовый** спектр;
- 4 сформулировать свойства Фурье, включая **перенос спектра**;
- 5 узнавать спектры **АМ** и **ЧМ**;
- 6 понять природу **утечки** спектра;
- 7 решить **минимальную задачу ЦОС**: восстановить параметры по отсчётам.

Синусоида — «кирпич» любого сигнала

- У синусоиды всего **три** параметра:
 - амплитуда A ;
 - частота f (период $T = 1/f$);
 - фаза φ .
- Идея: **любой сигнал** собирается из синусоид.
- Спектр — «список деталей»: сколько какой синусоиды взято.



Ряд Фурье: сигнал = сумма гармоник

- Периодический сигнал раскладывается в сумму синусоид с частотами, кратными основной: $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$

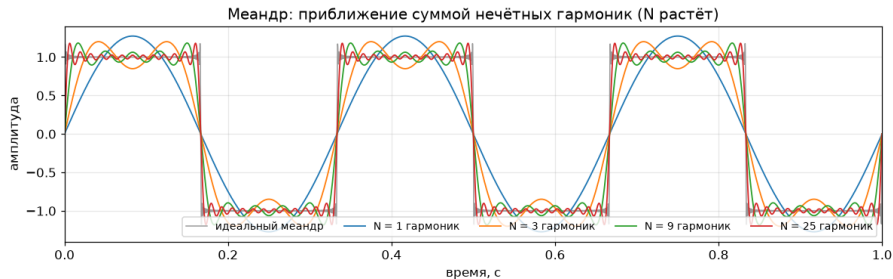
- Эти составляющие называются **гармониками**:

$$x(t) = \sum_k c_k \sin(2\pi k f_0 t + \varphi_k).$$

- Чем больше гармоник — тем точнее форма.
- У **меандра** остаются только **нечётные** гармоники с амплитудой $\sim 1/k$.

Меандр: приближение суммой гармоник

- N гармоник — ступенька всё «ровнее».
- Около разрыва — **выброс** (явление Гиббса).
- Выброс $\approx 9\%$ и не исчезает при росте N , лишь сужается.



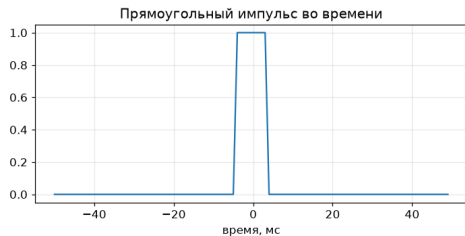
Спектр меандра

- Только нечётные гармоники:
3, 9, 15, 21, ... Гц.
- Амплитуда падает как $1/k$.
- Вывод: сигналы с **разрывами** «дорого» описывать гармониками.



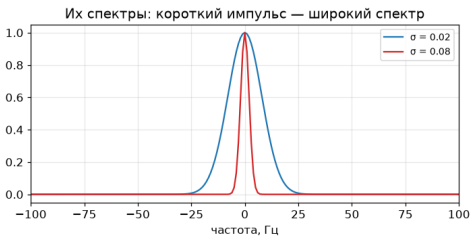
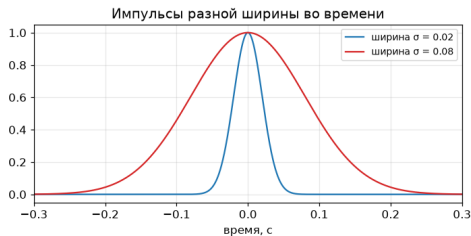
Непериодический сигнал: непрерывный спектр

- Одиночный импульс = сумма переходит в **интеграл Фурье**.
- Отдельные линии становятся **непрерывной** кривой.
- Для прямоугольного импульса это функция **sinc**.



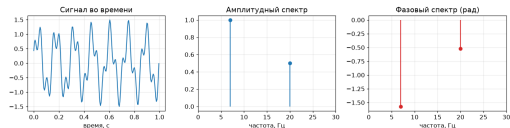
Свойство: короткий импульс — широкий спектр

- Чем **короче** сигнал во времени, тем **шире** его спектр.
- Короткий импульс требует широкой полосы.
- Длинный низкочастотный процесс — в узкой полосе.



Амплитудный и фазовый спектр

- Полный спектр **комплексный**: амплитуда **и** фаза.
- **Фаза** отвечает за форму сигнала и его положение во времени.
- Пример: в RFID именно **фаза** несёт информацию о расстоянии.



Свойства преобразования Фурье

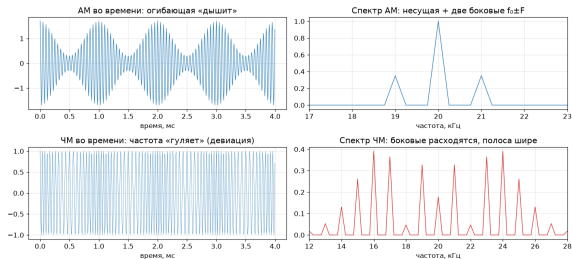
- **Линейность:** спектр суммы = сумма спектров.
- **Сдвиг во времени** $\leftrightarrow$ фаза (амплитуды не меняются).
- **Подобие (масштаб):** короткий сигнал — широкий спектр.
- **Умножение на несущую** = перенос спектра $\Rightarrow$ **модуляция**.

Дальше — иллюстрация модуляции

Покажем, как перенос спектра выглядит для АМ и ЧМ. Это примеры, подробно — лекция 5.

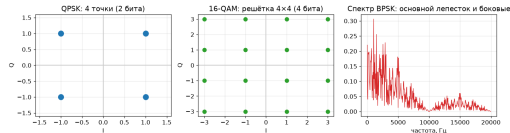
Спектры радиосигналов: АМ и ЧМ

- **АМ:** несущая + две боковые полосы $f_0 \pm F$.
- **ЧМ:** боковых много, спектр **расходится**.
- Чем больше **девиация**, тем шире полоса.
- **ФМ** по спектру похожа на ЧМ (фаза $\leftrightarrow$ частота).



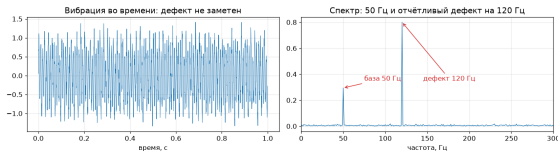
Цифровая модуляция — затравка

- Сигнал — **точка на плоскости I/Q** (амплитуда и фаза).
- BPSK — 2 точки, QPSK — 4, QAM — решётка.
- Спектр занимает **полосу**, определяя скорость передачи.
- Подробно (I/Q, демодуляция) — лекция 5.



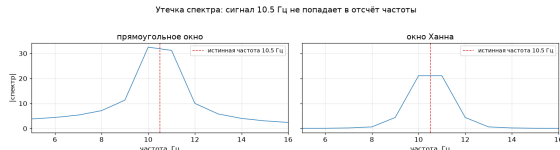
Спектры реальных сигналов

- Сигнал вибрации: база 50 Гц, дефект подшипника 120 Гц, шум.
- Во времени дефект **не** виден.
- В спектре — отчётливая линия.
- Так спектр превращает кривую в числа.



Усечение сигнала: почему пики «расплываются»

- Конечный кусок = умножение на **прямоугольное окно**.
- Возникает **утечка**: линия превращается в «холмик».
- Сглаживающие **окна** (Ханна) уменьшают утечку.
- Подробно — **лекция 4**.

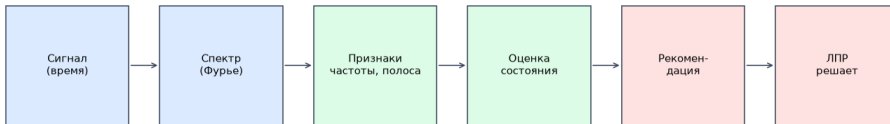


Окно Ханна — плавное затухание к краям отрезка (приподнятый косинус): стык гладкий, скачок исчезает, утечка резко падает.

От спектра к решению: признаки для КСППР

- Из спектра извлекаем **признаки**: частоты, гармоники, полосу.
- Признаки описывают **состояние** объекта.
- Состояние → **рекомендация** → решение **ЛПР**.
- Это вход в контур **КСППР** (Human-in-the-Loop).

Спектр — источник признаков для КСППР



Минимальная задача цифровой обработки сигналов

- **Дано:** N дискретных отсчётов $x[n] = x(n/f_d)$.
- **Найти:** параметры A, f, φ модели $x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$.
- **«Минимальная»:** всего три неизвестных, но видна вся цепочка *дискретизация $\rightarrow$ оценка $\rightarrow$ восстановление*.
- Всё остальное в курсе — **обобщение** этой задачи.

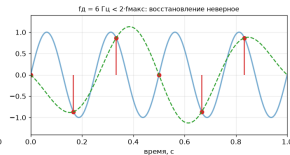
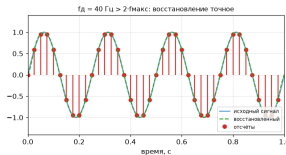
Идея

Сигнал из отсчётов полностью описывается **несколькими числами**.

Восстановление формы по дискретным отсчётам

- Теорема Котельникова: $f_d \geq 2f_{\max}$ — форма точна.
- Иначе — **алиасинг**: ложная частота.
- Отсчёты взвешивают сдвинутые **sinc**:

$$x(t) = \sum_n x[n] \operatorname{sinc}(f_d t - n).$$

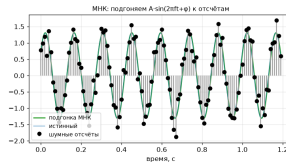


Метод 1: наименьшие квадраты

- Подгоняем модель $A \sin(2\pi f t + \varphi)$ ко всем отсчётам:

$$\min_{A, f, \varphi} \sum_n (x[n] - A \sin(2\pi f t_n + \varphi))^2.$$

- Оценки почти совпадают с истиной.
- Минус: нужна модель и начальное приближение.



Оценки параметров

параметр	истина	оценка
A	1.30	1.31
f, Гц	7.00	6.992
φ , рад	0.60	0.590

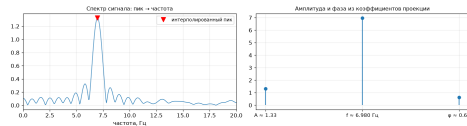
Метод 2: спектральный (БПФ)

- Пик спектра $\rightarrow$ частота f .
- Параболическая интерполяция уточняет f между бинами.
- Амплитуда и фаза — проекция на $\sin$ и $\cos$:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{atan2}(b, a).$$

- Быстро, но чувствительно к **утечке**.

Утечка — размазывание пика: конечный отрезок не содержит целого числа периодов, и часть энергии линии «протекает» в соседние частоты.



Точность оценки

- Ошибка падает с ростом **ОСШ** и числа отсчётов.
- **МНК** выходит на теоретический предел точности.
- **БПФ** быстрее, но упирается в систематическую ошибку.
- Выбор — компромисс **точность/скорость**.



Задание №2 (для своего проекта)

- 1 Найти **спектр** сигнала своего проекта (амплитудный и фазовый).
- 2 Выделить **три доминирующие частоты** и дать им интерпретацию.
- 3 Оценить **ширину полосы** сигнала.
- 4 Если есть несущая — определить её частоту и боковые полосы.
- 5 Проверить отсутствие **утечки** (или применить окно).

Сдавать: ноутбук с графиками + **один** слайд-вывод.

Итоги лекции 2

- Любой сигнал собирается из **синусоид**; спектр — «список деталей».
- **Ряд Фурье** даёт гармоники; у меандра — только нечётные.
- Полный спектр **комплексный**: амплитуда **и** фаза.
- **Модуляция** = перенос спектра: АМ — две боковые, ЧМ — расходящиеся.
- Конечный кусок $\Rightarrow$ **утечка**; спасают окна (лекция 4).
- **Минимальная задача ЦОС**: по отсчётам восстанавливаются A, f, φ (МНК точно, БПФ быстро).

- 1 Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов.*
- 2 Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов.*
- 3 Солонина А. И. и др. *Основы цифровой обработки сигналов.*
- 4 Умняшкин С. В. *Основы теории цифровой обработки сигналов.*

Дальше

Лекция 3: дискретное преобразование Фурье (ДПФ).