

Обработка сигналов

Лекция 4. БПФ и практический спектральный анализ

Прикладная математика и информатика

4 курс · 01.03.02 · ИИ и системная аналитика

Маршрут блока «Сигналы и спектры»

- **Лекция 1–2:** сигнал, спектр как идея.
- **Лекция 3:** как посчитать спектр — ДПФ.
- **Лекция 4 (сегодня):** как посчитать **быстро** (БПФ) и **правильно** (окна, разрешение, усреднение).
- **Лекция 5:** спектры радио и модуляция, комплексная огибающая (I/Q).

Цели лекции 4

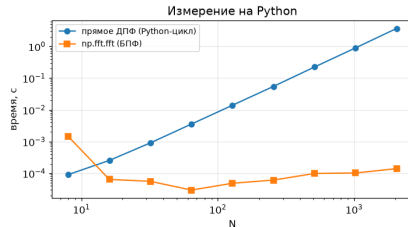
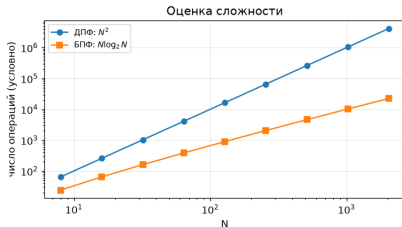
- 1 Объяснить идею БПФ «разделяй и властвуй» и «бабочку» radix-2.
- 2 Понять роль **бит-реверса** и почему БПФ даёт $O(N \log N)$.
- 3 Выбирать **окно** под задачу (утечка против разрешения).
- 4 Объяснить $\Delta f = 1/T$ и почему **zero-padding не улучшает** разрешение.
- 5 Усреднять периодограммы (**метод Уэлча**) и читать **PSD**.
- 6 Строить **спектрограмму** и понимать компромисс время–частота.

Зачем БПФ: ещё раз о цене

Прямое ДПФ — умножение матрицы $N \times N$ на вектор:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \Rightarrow O(N^2).$$

БПФ (Cooley–Tukey) даёт **тот же** результат за $O(N \log_2 N)$. Для $N = 10^6$: 10^{12} против $\approx 2 \cdot 10^7$ — быстрее в десятки тысяч раз.



Идея: разделяй и властвуй

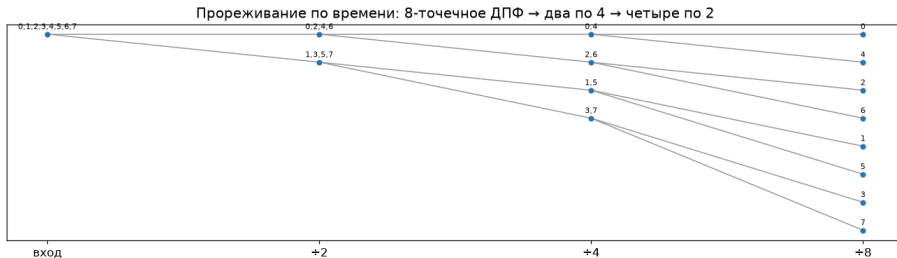
Пусть N чётно. Разделим сумму на **чётные** и **нечётные** отсчёты, $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$:

$$X[k] = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{kr}}_{E[k]} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr}}_{O[k]}.$$

- ДПФ длины N свелось к **двум** ДПФ длины $N/2$.
- Рекурсия даёт $\log_2 N$ уровней — **прореживание по времени** (DIT).

Прореживание по времени: дерево разбиения

- 8 отсчётов $\rightarrow$ чётные/нечётные $\rightarrow \frac{N}{4}$ -блоки $\rightarrow$ пары.
- На каждом уровне — свой набор поворотных множителей W_N^k .

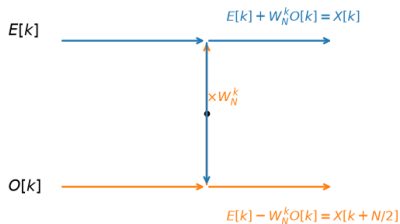


Бабочка radix-2

Два ДПФ половинной длины объединяются «бабочкой»:

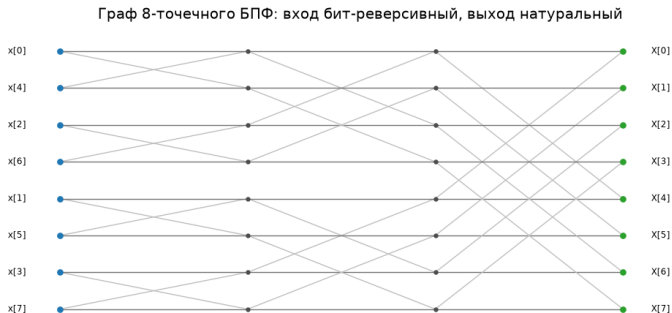
$$X[k] = E[k] + W_N^k O[k], \quad X[k + N/2] = E[k] - W_N^k O[k], \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Бабочка radix-2 (ДПФ по основанию 2)



Полный граф 8-точечного БПФ

- Вход — в **бит-реверсивном** порядке, выход — **натуральный**.
- Три стадии по 4 бабочки: $\log_2 8 = 3$ уровня.



Бит-реверс

Индекс на входе читается справа налево: $1 = 001_2 \rightarrow 100_2 = 4$. Порядок для $N = 8$: 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.

Бит-реверс индексов для $N=8$: 0,4,2,6,1,5,3,7

n	двоичный	реверс	новый индекс
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

- **radix-2** — деление пополам, $N = 2^m$ (проще всего).
- **radix-4, split-radix, mixed-radix** — меньше операций.
- Простое большое N (напр. 1000003) — берут смешанные алгоритмы или округляют до степени двойки.
- Вещественный сигнал: достаточно $N/2 + 1$ точек (rfft) — вдвое дешевле.
- Зрелые библиотеки: **FFTW**, **pocketfft** (NumPy/SciPy), Intel **MKL**, **cuFFT** (GPU).

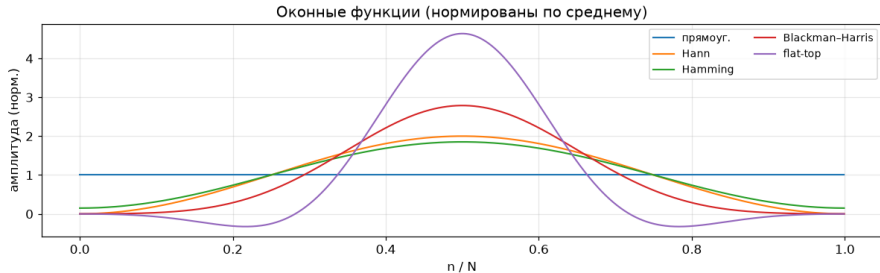
Конечная запись: откуда утечка

Мы считаем ДПФ **конечного** куска: формально умножаем сигнал на **прямоугольное окно** шириной T .

- Умножение во времени $\Leftrightarrow$ **свёртка в спектре** с функцией окна (для прямоугольного — sinc).
- Отсюда **утечка**: чистый тон превращается в «холмик» с боковыми лепестками.
- **Окно** — плавное обрезание: давит боковые лепестки, но **расширяет главный**.

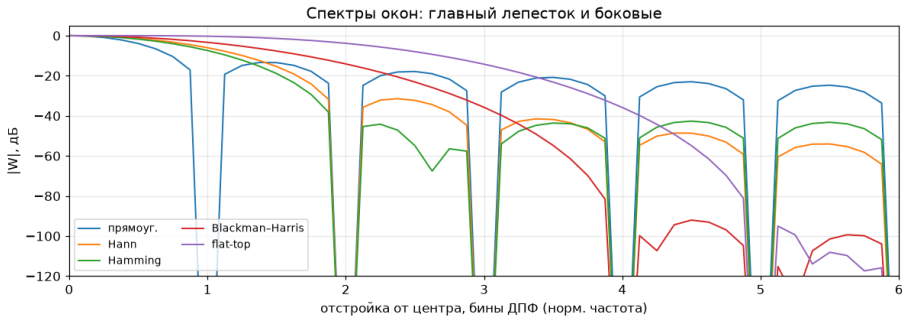
Оконные функции

- Прямоугольное, Hann, Hamming, Blackman-Harris, flat-top.
- Плавный спад к краям $\Rightarrow$ меньше разрыв $\Rightarrow$ слабее утечка.



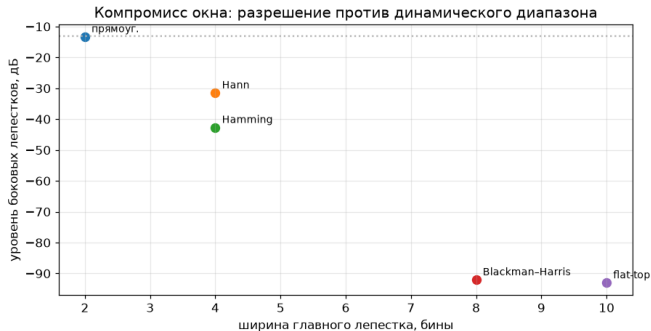
Спектры окон

- Главный лепесток $\leftrightarrow$ разрешение.
- Боковые лепестки $\leftrightarrow$ маскировка слабых компонент.



Компромисс окна

- Узкий главный лепесток и низкие боковые одновременно **нельзя**.
- Прямоуг.: 2 бина, -13 дБ; Hann: 4 бина, -31 дБ; Hamming: 4 бина, -43 дБ.
- Blackman–Harris: 8 бинов, -92 дБ; flat-top: 10 бинов — точная амплитуда.



Паспорт окна: коэффициенты

Кроме формы нужны **числа**:

- **coherent gain** = $\overline{w}$ — нормировка амплитуды: Hann 0.5, Hamming 0.54, flat-top 0.22.
- **ENBW** (эквивалентная шумовая полоса): $N \sum w^2 / (\sum w)^2$ — нормировка мощности/PSD: прямоуг. 1.0, Hann 1.5, Hamming 1.36, flat-top 3.77.

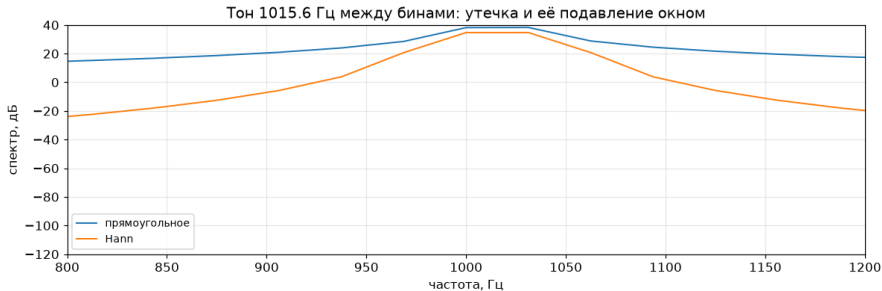
Зачем

Амплитуду линии делят на coherent gain, а шумовую полку — на ENBW. Иначе «высота» пика зависит от окна. `scipy.signal.welch` делает это сам.

Утечка и её подавление

Тон **ровно между** бинами; прямоугольное окно против Hann:

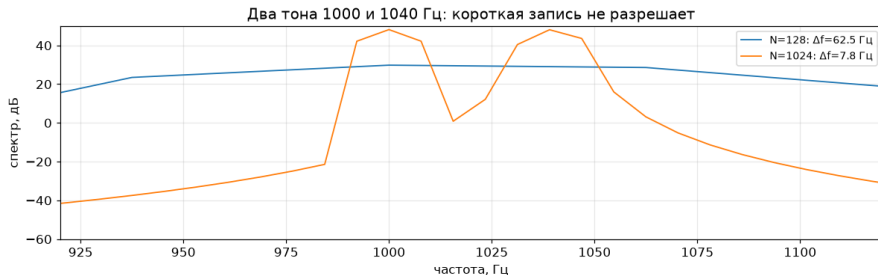
- прямоугольное: боковые падают медленно (≈ -13 дБ);
- Hann: боковые падают быстро, слабые линии видны.



Разрешение: $\Delta f = 1/T$

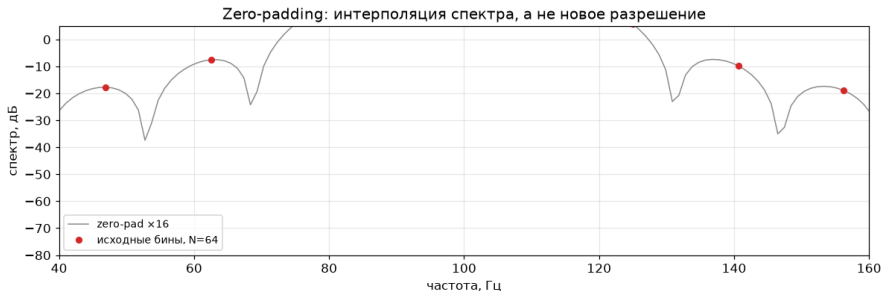
$$\Delta f = \frac{f_d}{N} = \frac{1}{T}.$$

Два тона различимы (критерий Рэлея), если расстояние $> \Delta f$; для Hann практическое разрешение $\approx 2\Delta f$.



Zero-padding не создаёт разрешение

- Дополнение нулями даёт **плотную сетку** частот.
- Это **интерполяция** той же спектральной функции между бинами.
- Для разрешения близких частот нужно **удлинять запись**, а не паддить.



Усреднение: метод Уэлча

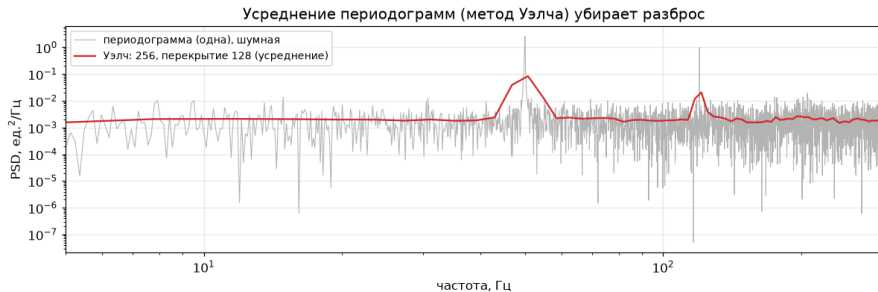
Одна периодограмма $\hat{P}(f) = |X(f)|^2$ сильно **шумит** (дисперсия не падает с ростом N). Идея:

- 1 разрезать запись на **сегменты** (можно с **перекрытием**);
- 2 к каждому — **окно**;
- 3 посчитать $|\text{БПФ}|^2$;
- 4 **усреднить** по сегментам.

Что получаем

Несмещённую оценку с меньшей дисперсией: шум «сглаживается», реальные линии остаются. Цена — разрешение по длине сегмента.

Уэлч убирает разброс



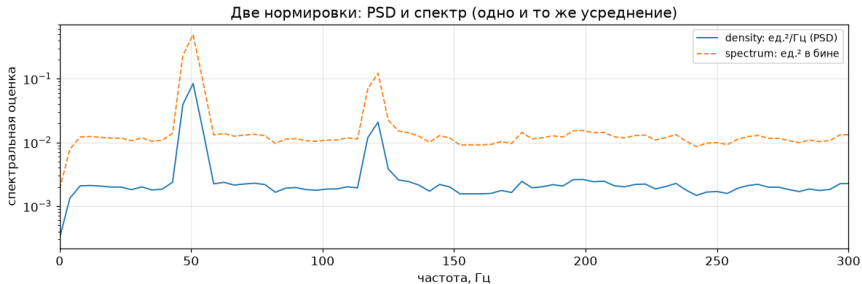
Что такое PSD

Спектральная плотность мощности — мощность на **герц**:

- `scaling='density'`: ед.²/Гц (PSD) — для шумов;
- `scaling='spectrum'`: ед.² в бине — для линий.

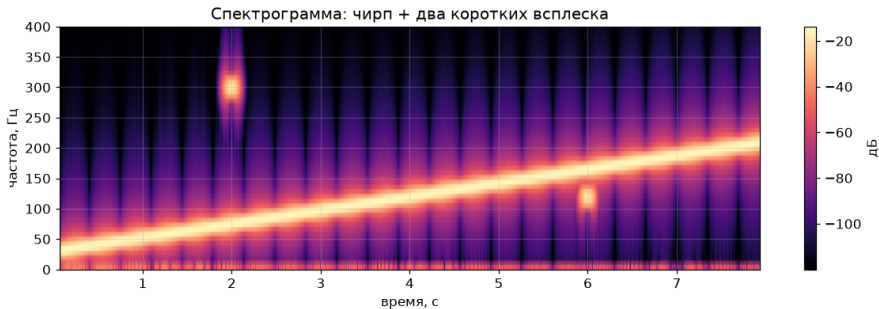
Площадь под PSD = полная мощность. Окно нормирует PSD через ENBW:

$$PSD = \frac{|W|^2}{f_d \cdot ENBW} \text{ (в welch — автоматически).}$$



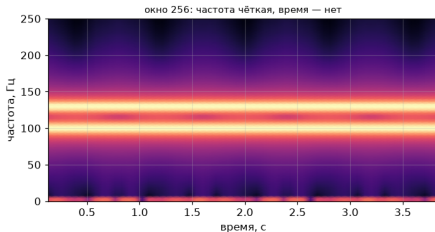
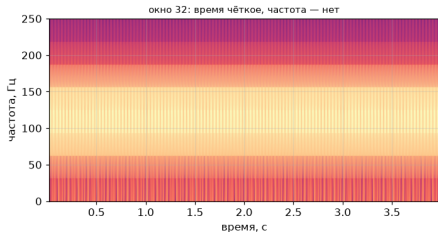
Время–частота: спектрограмма (STFT)

Если сигнал меняется во времени, одного спектра мало. **Короткое преобразование Фурье: спектр в скользящем окне $\Rightarrow$ спектрограмма** (X — время, Y — частота, цвет — мощность).



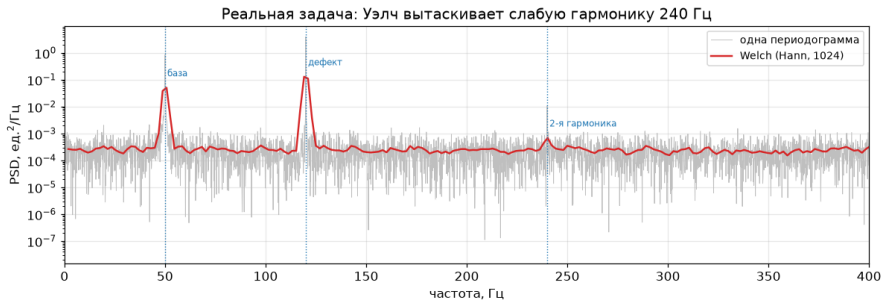
Компромисс время–частота

Принцип неопределённости: короткое окно — хорошее **время**, плохая **частота**; длинное — наоборот.



Реальный сигнал: вибрация

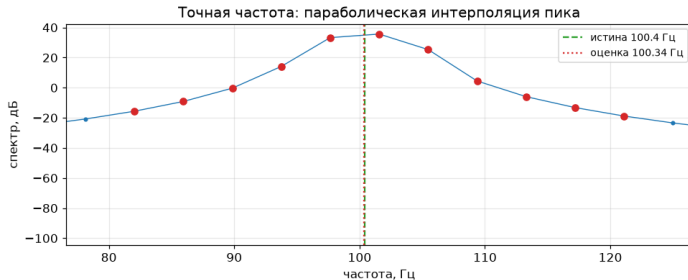
База 50 Гц, дефект 120 Гц, слабая вторая гармоника 240 Гц и шум. Уэлч вытаскивает слабую линию, которую одна периодограмма прячет.



Точная оценка частоты

Параболическая интерполяция $\log |X|$ по трём точкам вокруг пика:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{y_{-1} - y_{+1}}{y_{-1} - 2y_0 + y_{+1}}, \quad f_0 \approx (k + \delta)\Delta f.$$



Рецепт на Python

Основное

```
w = signal.get_window("hann", N)
X = np.fft.rfft(x * w); f = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)
f, Pxx = signal.welch(x, fs, window="hann", nperseg=1024,
                      noverlap=512, scaling="density")
f, t, S = signal.spectrogram(x, fs, window="hann", nperseg=128,
                              noverlap=96, scaling="density")
```

Порядок: выбрать T под нужное $\Delta f \rightarrow$ выбрать окно $\rightarrow$ взять $N = 2^m \rightarrow$ посчитать $\rightarrow$ перевести в дБ для глаз.

Задание №4 (для своего проекта)

- 1 Реализовать **свою** БПФ radix-2 и сверить с numpy.fft.
- 2 Показать **утечку** и подавление окном (прямоуг. против Hann/Hamming).
- 3 Сравнить **разрешение** при двух длительностях; проверить zero-padding.
- 4 Оценить **PSD** методом **Уэлча**, объяснить nperseg/noverlap.
- 5 Построить **спектрограмму** нестационарного участка.

Сдавать: ноутбук с графиками + **один** слайд-вывод (почему такое окно).

Итоги лекции 4

- **БПФ** — алгоритм, а не новое преобразование: $O(N^2) \rightarrow O(N \log N)$.
- Прореживание по времени, **бабочки** radix-2, **бит-реверс**.
- Конечная запись $\rightarrow$ **утечка**; окна лечат, но расширяют главный лепесток.
- Разрешение $\Delta f = 1/T$; **zero-padding** только интерполирует.
- **Уэлч**: сегменты + окно + усреднение $|\text{БПФ}|^2 \rightarrow$ устойчивая PSD.
- **Спектрограмма** показывает эволюцию спектра: время или частота.

Литература

- ❶ Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов.*
- ❷ Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов.*
- ❸ Солонина А. И. и др. *Основы цифровой обработки сигналов.*
- ❹ Умняшкин С. В. *Основы теории цифровой обработки сигналов.*
- ❺ Harris F. J. *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the DFT.*
- ❻ Welch P. D. *The Use of the FFT for Estimation of Power Spectra.*

Дальше

Лекция 5: спектры радио и модуляция, комплексная огибающая (I/Q).