

Обработка сигналов

Лекция 5. Спектры радиосигналов и модуляция

Прикладная математика и информатика

4 курс · 01.03.02 · ИИ и системная аналитика

- **Лекция 1–2:** сигнал, спектр как идея.
- **Лекция 3:** как посчитать спектр — ДПФ.
- **Лекция 4:** как посчитать быстро (БПФ) и правильно (окна, Уэлч, PSD).
- **Лекция 5 (сегодня):** как сигнал **переносят по частоте** — несущая, модуляция, спектры радио, I/Q.
- **Лекция 6:** свёртка, корреляция и линейные системы.

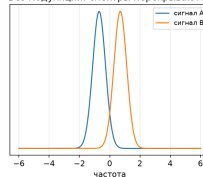
Цели лекции 5

- 1 Объяснить, зачем нужна **модуляция** и что такое **несущая**.
- 2 Понять **комплексную огибающую** и квадратурные компоненты **I/Q**.
- 3 Разобрать **АМ**: сигнал, спектр, глубина модуляции, варианты (DSB, SSB).
- 4 Разобрать **ЧМ и ФМ**: индекс модуляции, функции Бесселя, полоса Карсона.
- 5 Освоить **цифровую модуляцию**: ASK/FSK/PSK, BPSK/QPSK/QAM, созвездия.
- 6 Понять роль **формирующего фильтра** и межсимвольной интерференции.
- 7 Увидеть всё это в **Python** и в проекте (RFID, Wi-Fi, SDR).

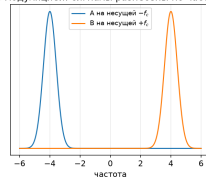
Зачем нужна модуляция

- Антенна эффективно излучает, когда её размер сравним с длиной волны $\lambda = c/f$.
- Звук (20 Гц–20 кГц) $\Rightarrow$ волны в десятки километров — излучать невозможно.
- Решение: **перенести** спектр на высокую несущую f_c .
- **Несущая** — высокочастотное колебание, которое «везёт» информацию.
- Плюс: **разнесение** многих каналов по частоте.

Без модуляции: спектры перекрываются



С модуляцией: сигналы разнесены по частоте



Несущая и комплексное представление

Несущая: $c(t) = A \cos(2\pi f_c t + \varphi)$.

Модуляция меняет **амплитуду**, **частоту** или **фазу** несущей:

- амплитудная (АМ) — меняем $A(t)$;
- частотная (ЧМ) — меняем мгновенную частоту;
- фазовая (ФМ) — меняем фазу $\varphi(t)$.

Удобно записать сигнал через **комплексную огибающую**:

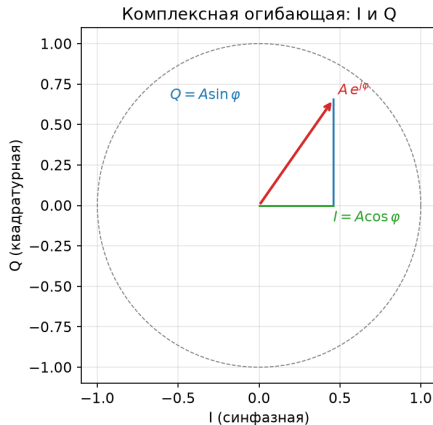
$$s(t) = \operatorname{Re}\{g(t) e^{j2\pi f_c t}\}, \quad g(t) = I(t) + j Q(t).$$

- $g(t)$ — **огибающая** (медленная, «информация»);
- $e^{j2\pi f_c t}$ — быстрое вращение на несущей.

I/Q: квадратуры

$$s(t) = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t).$$

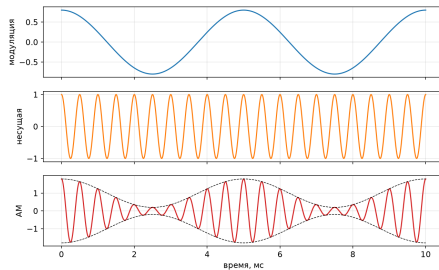
- I — синфазная, Q — квадратурная (сдвиг 90°).
- Дают амплитуду и фазу: $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$,
 $\varphi = \arctan(Q/I)$.
- Так работает любой SDR: квадратурный демодулятор $\Rightarrow$ цифровые I/Q.



Амплитудная модуляция (АМ)

$$s(t) = (1 + m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_c t),$$
$$0 \leq m \leq 1.$$

- m — **глубина модуляции**; огибающая повторяет сообщение.
- Простота: детектирование — диод + фильтр.

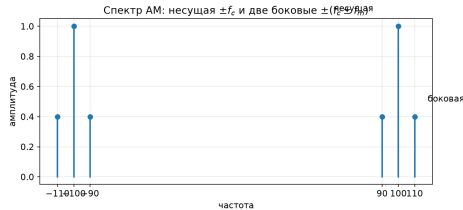


Спектр АМ: несущая и две боковые

По формуле произведения:

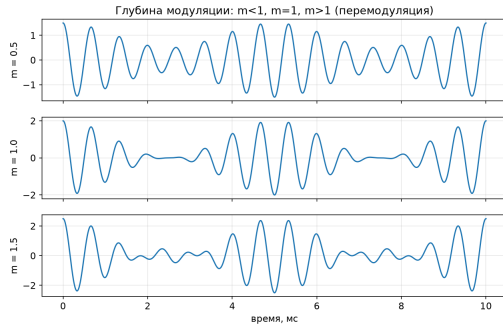
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)].$$

- Несущая f_c + две **боковые** $f_c \pm f_m$.
- Полоса АМ: $2f_{m,\max}$.
- Вся информация — в **боковых**; несущая — «мощность впустую».



Глубина модуляции и перемодуляция

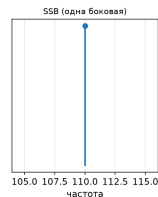
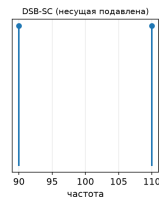
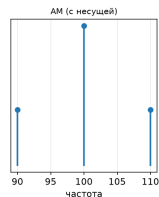
- $m < 1$ — нормально.
- $m = 1$ — максимальная амплитуда без искажений.
- $m > 1$ — **перемодуляция**: огибающая «рвётся», диодный детектор искажает.



Варианты АМ: DSB-SC и SSB

Вариант	Полоса	Особенность
AM	$2f_m$	простой приём
DSB-SC	$2f_m$	вся мощность полезна
SSB	f_m	самая узкая полоса

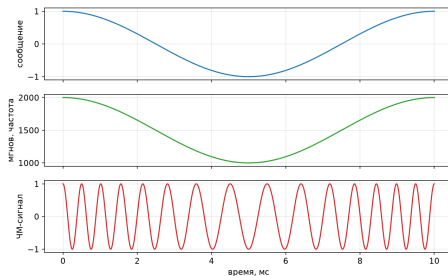
- Несущую можно подавить (DSB-SC).
- Можно оставить одну боковую (SSB).



Угловая модуляция: ЧМ и ФМ

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)).$$

- **ФМ:** $\varphi(t) = k_p u(t)$.
- **ЧМ:** $f(t) = f_c + k_f u(t)$, фаза — интеграл сообщения.
- **Индекс β** — «сила» угловой модуляции.
- Амплитуда постоянна $\Rightarrow$ устойчивость к помехам.

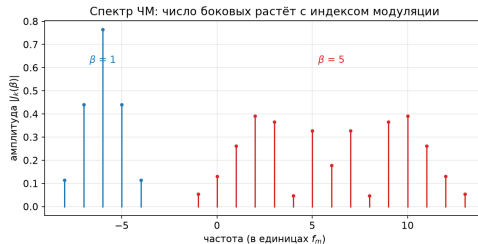


Спектр ЧМ: функции Бесселя

Для тона $u(t) = \cos(2\pi f_m t)$:

$$s(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos(2\pi(f_c + kf_m)t).$$

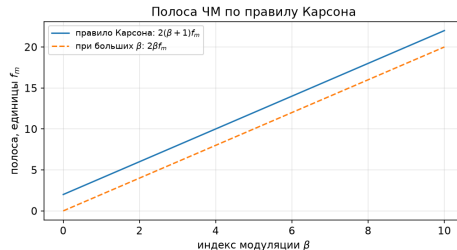
- Боковых **много**, шаг f_m вокруг f_c .
- Чем больше β , тем шире спектр.



Полоса ЧМ (правило Карсона)

$$B_{\text{ЧМ}} \approx 2(\beta + 1)f_m \xrightarrow{\beta \gg 1} 2\beta f_m.$$

- Узкополосная ЧМ ($\beta \ll 1$) — полоса как у АМ.
- Широкополосная ЧМ — шире, но помехоустойчивее.



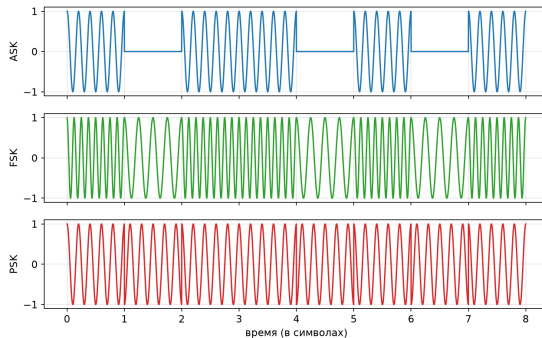
АМ против ЧМ

Свойство	АМ	ЧМ
Что меняется	амплитуда	частота (фаза)
Полоса	$2f_m$ (узкая)	$2(\beta + 1)f_m$ (шире)
Постоянство амплитуды	нет	да
Помехоустойчивость	ниже	выше
Приём	простой (детектор)	сложнее (дискриминатор)

- FM-радио: шире полоса, но звук высокого качества.
- Радиосвязь/телеметрия: ЧМ/ФМ устойчивее к замираниям.

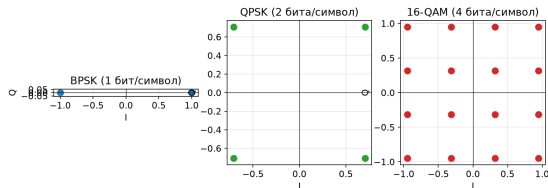
Цифровая модуляция: ASK, FSK, PSK

- ASK — переключаем амплитуду.
- FSK — частоту.
- PSK — фазу.
- Каждый **символ** несёт целое число бит.



Созвездия: BPSK, QPSK, QAM

- **BPSK** — 1 бит/символ.
- **QPSK** — 2 бита.
- **16-QAM** — 4 бита.
- Чем плотнее созвездие, тем выше скорость, но меньше «запас» до ошибки.



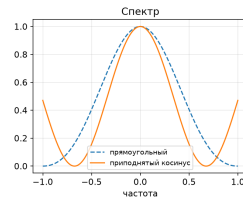
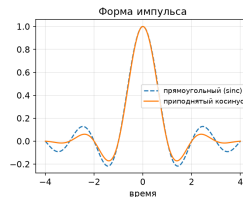
Скорость против помехоустойчивости

Схема	бит/символ	Скорость	Помехоустойчивость
BPSK	1	низкая	высокая
QPSK	2	средняя	хорошая
16-QAM	4	высокая	ниже
64-QAM	6	очень высокая	требует высокого ОСШ

- Компромисс «скорость–качество»: схему выбирают под отношение сигнал/шум.
- Wi-Fi/LTE **адаптивно** меняют модуляцию и кодирование.

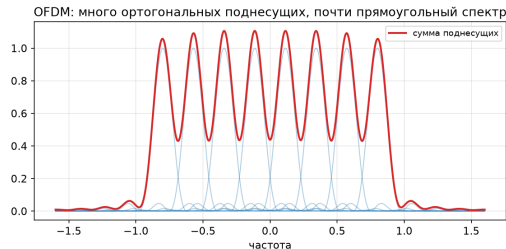
Формирующий фильтр и межсимвольная интерференция

- Прямоугольные символы дают широкий спектр и мешают друг другу (МСИ).
- **Приподнятый косинус** ограничивает полосу и убирает МСИ в точках съёма.
- Коэффициент α — полоса против крутизны фронтов.



OFDM: много поднесущих

- Вместо одной широкой полосы — **много** узких ортогональных поднесущих.
- Работает через **БПФ**: модуляция — обратное БПФ.
- Устойчиво к многолучёвости; основа Wi-Fi, LTE, DVB.



I/Q на практике: SDR и дисбаланс

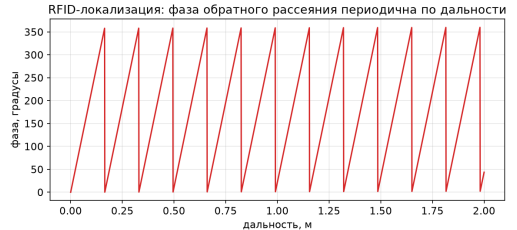
- **Квадратурный демодулятор:** умножаем на $\cos$ и $\sin$, получаем I и Q .
- Дальше всё — цифровая обработка комплексной огибающей.
- **Идеальный I/Q** — зеркальные частоты подавлены.
- **Дисбаланс** амплитуд/фаз I и Q даёт *зеркальный* отклик (image) — типичная проблема дешёвых SDR.
- Компенсация: калибровка, цифровые корректоры.

Зачем это в курсе

Реальные радиоустройства (в т.ч. RFID и Wi-Fi) отдают именно I/Q — с ними и работает весь дальнейший аппарат.

В проекте: RFID и обратное рассеяние

- Метка **отражает** несущую, меняя амплитуду/фазу — это модуляция.
- Принимаем **RSSI** (амплитуда) и **фазу** — «кто» и «где».
- Фаза периодична по дальности $\Rightarrow$ основа локализации (лекция 9).



Практика: модуляция в Python (SciPy)

Что делаем в ноутбуке

- строим АМ/ЧМ во времени и их спектры (окно Hann);
 - собираем созвездия BPSK/QPSK/16-QAM;
 - формируем сигнал приподнятым косинусом;
 - демодулируем через I/Q и смотрим спектр;
 - добавляем шум и измеряем ошибки.
-
- Ключевые функции: `scipy.signal`, `numpy.fft`, `matplotlib`.
 - Всё согласовано с проектом: сигнал → спектр → признаки → решение.

- Модуляция переносит спектр на несущую (антенна, разнесение каналов).
- **Комплексная огибающая** и **I/Q** — универсальный язык радио.
- **АМ**: несущая + две боковые; полоса $2f_m$; есть DSB-SC и SSB.
- **ЧМ/ФМ**: индекс β , спектр Бесселя, полоса Карсона.
- **Цифра**: ASK/FSK/PSK, созвездия; баланс «скорость–качество».
- **Формирующий фильтр** убирает МСИ; **OFDM** — через БПФ.
- Всё это напрямую нужно в проекте (RFID, Wi-Fi, SDR).

Вопросы для самопроверки

- 1 Зачем нужна модуляция и что такое несущая?
- 2 Что такое комплексная огибающая и компоненты I/Q?
- 3 Какие составляющие в спектре АМ и какова её полоса?
- 4 Чем DSB-SC и SSB выгоднее обычной АМ?
- 5 Что такое индекс модуляции ЧМ и правило Карсона?
- 6 Почему спектр ЧМ описывается функциями Бесселя?
- 7 Сколько бит на символ в BPSK, QPSK, 16-QAM?
- 8 Зачем нужен приподнятый косинус?
- 9 Как OFDM связан с БПФ?
- 10 Что даёт анализ I/Q в RFID?

- **Лекция 6.** Свёртка, корреляция и линейные системы: импульсная характеристика, передаточная функция, Z-преобразование, устойчивость.
- На практике: продолжим генерацию и демодуляцию сигналов в Python.
- В проекте: спектр и I/Q → признаки → оценка состояния.

Спасибо! Вопросы?