

Лекция 5. Спектры радиосигналов и модуляция — подробный разбор

Подробный конспект пятой лекции: зачем сигнал «переносят» на несущую, как выглядят спектры модулированных сигналов, что такое комплексная огибающая и I/Q, как устроена аналоговая и цифровая модуляция и как всё это связано с проектом (RFID, Wi-Fi, SDR). Материала много — рассчитан и на подготовку преподавателя, и на самостоятельное чтение студентом.

О чём этот текст и как им пользоваться

- Это **подробный конспект** лекции 5 — первой в перестроенном (сжатом) блоке.
 - Лекция отвечает на вопросы:
 - почему без модуляции радио невозможно;
 - что такое несущая и комплексная огибающая;
 - как выглядят спектры АМ, ЧМ, ФМ;
 - что такое созвездия и почему BPSK/QPSK/QAM;
 - зачем формирующий фильтр и OFDM;
 - как всё это считать в Python.
 - Формат — списки и таблицы: удобно готовиться и объяснять.
 - Формулы даны текстом (в вики нет мат-плагина); полные формулы — в PDF.
 - Числа согласованы с презентацией `lecture05.pdf` и фигурами `lecture05/figures/`.
-

Цели лекции (что должен уметь студент)

1. Объяснить, **зачем нужна модуляция** и что такое **несущая**.
2. Понять **комплексную огибающую** и квадратуры **I/Q**.
3. Разобрать **АМ**: сигнал, спектр, глубину, КПД, варианты (DSB-SC, SSB).
4. Разобрать **ЧМ и ФМ**: индекс модуляции, функции Бесселя, правило Карсона.
5. Освоить **цифровую модуляцию**: ASK/FSK/PSK, BPSK/QPSK/QAM, созвездия.
6. Понять роль **формирующего фильтра** и межсимвольной интерференции.
7. Понять идею **OFDM** и её связь с БПФ.
8. Увидеть всё это в **Python** и в проекте (RFID, Wi-Fi, SDR).

Зачем каждый пункт на практике:

- Модуляция — основа всей радиосвязи.
 - I/Q — язык современных приёмников (SDR).
 - АМ/ЧМ — классика, которую надо понимать.
 - Цифровая модуляция — Wi-Fi, LTE, Bluetooth.
 - Формирующий фильтр — без него цифровой сигнал «размазывается».
 - OFDM — то, что реально работает в вашем Wi-Fi.
 - RFID — прямой проект: амплитуда и фаза обратного рассеяния.
-

1. Зачем нужна модуляция

1.1 Проблема излучения

- Антенна эффективно излучает, когда её размер сравним с **длиной волны** $\lambda = c / f$ ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с).
- Звук 20 Гц–20 кГц → длина волны от 15 км до 15 м.
- Излучать такие волны практически невозможно (огромные антенны).
- Решение: **перенести** спектр сигнала на высокую частоту.

1.2 Несущая

- **Несущая** — высокочастотное колебание $s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi)$.
- Оно «везёт» информацию, не содержа её само по себе.
- Модуляция меняет один или несколько параметров несущей:
 - амплитуду $A \rightarrow$ АМ;
 - частоту $f_c \rightarrow$ ЧМ;
 - фазу $\varphi \rightarrow$ ФМ.

1.3 Дополнительные выгоды

- **Разнесение каналов** по частоте: радиостанции, ТВ, сотовая связь.
- **Малые антенны**: длина волны на несущей короткая.
- **Эффективное использование спектра**: диапазоны распределены.
- **Мультиплексирование**: в одном канале — несколько сигналов.

1.4 Простая картинка

- Два низкочастотных сигнала перекрываются по частоте → мешают.
 - После переноса на разные несущие — разнесены, не мешают.
 - Модуляция — это «раскладывание» сигналов по частоте.
-

2. Несущая и представления сигнала

2.1 Вещественное представление

- Реальный сигнал: $s(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$.
- Здесь $A(t)$ — огибающая, $\varphi(t)$ — фаза.
- Всё, что можно передать, — это изменения $A(t)$ и $\varphi(t)$.

2.2 Комплексное представление

- Комплексная экспонента: $e^{j2\pi f_c t} = \cos(2\pi f_c t) + j \cdot \sin(2\pi f_c t)$.
- Реальный сигнал: $s(t) = \operatorname{Re}\{g(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\}$.
- $g(t) = I(t) + j \cdot Q(t)$ — **комплексная огибающая**.
- $g(t)$ медленная (по сравнению с несущей) и содержит всю информацию.

2.3 Комплексная огибающая (baseband equivalent)

- Перенос «вниз» на нулевую частоту: убираем несущую, остаётся $g(t)$.
- Преимущества:
 - сигнал становится комплексным, но узкополосным;
 - дискретизировать можно по **полосе**, а не по f_c ;
 - удобно для цифровой обработки.
- Именно с $g(t)$ работает SDR и весь цифровой тракт.

2.4 Аналитический сигнал

- Из вещественного сигнала получают аналитический через преобразование Гильберта.
 - У аналитического сигнала нет отрицательных частот.
 - $g(t)$ — это огибающая аналитического сигнала.
 - Полезно для измерения мгновенной амплитуды и фазы.
-

3. I/Q и квадратуры

3.1 Разложение по квадратурам

- Из $s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\}$ получаем: $s(t) = I(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$.
- $I(t)$ — **синфазная** компонента (in-phase).
- $Q(t)$ — **квадратурная** (quadrature, сдвиг 90°).

3.2 Амплитуда и фаза

- $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$ — амплитуда.
- $\varphi = \arctan(Q / I)$ — фаза.
- Обратное: $I = A \cdot \cos \varphi$, $Q = A \cdot \sin \varphi$.
- Точка (I, Q) на комплексной плоскости однозначно задаёт сигнал.

3.3 Квадратурный демодулятор

- Умножаем вход на $\cos(2\pi f_c t) \rightarrow$ получаем I .
- Умножаем вход на $-\sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ получаем Q .
- После фильтра нижних частот — сигнал в полосе модуляции.
- Это аппаратная основа почти любого приёмника.

3.4 Дисбаланс I/Q

- Идеально амплитуды и фазы I и Q совпадают.
- Реально есть **дисбаланс**: разные усиления и отклонение от 90° .
- Следствие — **зеркальный отклик** (image) на «неправильной» частоте.
- Компенсация: калибровка, цифровые корректоры.
- Типичная проблема дешёвых SDR — важно уметь распознавать.

3.5 Зачем это в курсе

- Реальные устройства (RFID, Wi-Fi) отдают именно I/Q.
 - Дальнейшая обработка (фильтрация, демодуляция) — над комплексной огибающей.
-

4. Амплитудная модуляция (АМ)

4.1 Формула

- $s(t) = (1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_c t)$.
- m — **глубина модуляции** ($0 \leq m \leq 1$).
- Огибающая $1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)$ повторяет сообщение.

4.2 Спектр

- По формуле произведения косинусов: $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.
- Спектр АМ:
 - **несущая** на f_c ;
 - **верхняя боковая** на $f_c + f_m$;
 - **нижняя боковая** на $f_c - f_m$.
- Полоса АМ: $2 \cdot f_m$ (удвоенная полоса сообщения).

4.3 Амплитуды составляющих

- Несущая: амплитуда 1 (в нормировке).
- Каждая боковая: амплитуда $m/2$.
- При $m = 1$ боковые по 0.5 каждая.

4.4 Мощность и КПД

- Мощность несущей: P_c .
- Суммарная мощность боковых (для тона): $P_c \cdot m^2 / 2$.
- Полная мощность: $P_c \cdot (1 + m^2 / 2)$.
- **КПД** (доля полезных боковых): $\eta = m^2 / (2 + m^2)$.
 - $m = 0.5 \rightarrow \eta \approx 11\%$;
 - $m = 1 \rightarrow \eta \approx 33\%$.
- Вывод: обычная АМ тратит не менее 2/3 мощности «впустую» на несущую.

4.5 Глубина модуляции

- $m < 1$ — нормальная АМ, огибающая не рвётся.
- $m = 1$ — максимальная амплитуда без искажений.
- $m > 1$ — **перемодуляция**: огибающая «переворачивается», простой диодный детектор искажает.
- m измеряют по огибающей: $m = (A_{\max} - A_{\min}) / (A_{\max} + A_{\min})$.

4.6 Демодуляция АМ

- Простой **диодный детектор** + фильтр нижних частот.
 - Диод «срезает» отрицательную полуволну, фильтр выделяет огибающую.
 - Работает только если $m \leq 1$.
 - Простота — главное достоинство АМ (радиовещание, авиация).
-

5. Варианты амплитудной модуляции

5.1 АМ с несущей (обычная)

- Передаём несущую и обе боковые.
- Плюс: простой приём (детектор).
- Минус: большая часть мощности — в несущей.

5.2 DSB-SC (с подавленной несущей)

- Передаём только две боковые.
- Плюс: вся мощность — полезная.
- Минус: нужна синхронная демодуляция (восстановление несущей).

5.3 SSB (одна боковая полоса)

- Передаём одну боковую.
- Плюс: полоса вдвое уже, чем у АМ/DSB.
- Минус: сложнее формирование и приём.
- Применение: радиосвязь, где важна экономия полосы.

5.4 VSB (частично подавленная боковая)

- Компромисс между DSB и SSB.
- Одна боковая подавлена частично.
- Применение: телевидение (исторически).

5.5 Сравнение

Вариант	Что передаём	Полоса	Плюс	Минус
АМ	несущая + 2 боковые	$2 \cdot f_m$	простой приём	тратим мощность
DSB-SC	2 боковые	$2 \cdot f_m$	вся мощность полезна	синхронный приём
SSB	1 боковая	f_m	узкая полоса	сложнее
VSB	1 + часть 2-й	$\approx 1.25 \cdot f_m$	компромисс	для ТВ

6. Угловая модуляция: ЧМ и ФМ

6.1 Общая формула

- $s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$.
- Амплитуда A **постоянна** — информация в $\varphi(t)$.

6.2 Фазовая модуляция (ФМ)

- $\varphi(t) = k_p \cdot u(t)$ — фаза пропорциональна сообщению $u(t)$.
- k_p — индекс фазовой модуляции (рад/В).

6.3 Частотная модуляция (ЧМ)

- Мгновенная частота $f(t) = f_c + k_f \cdot u(t)$.
- Фаза — **интеграл** сообщения: $\varphi(t) = 2\pi k_f \int u(\tau) d\tau$.
- $\Delta f = k_f \cdot \max |u|$ — девиация частоты.

6.4 Связь ФМ и ЧМ

- ЧМ = ФМ от **интегрированного** сообщения.
- ФМ = ЧМ от **продифференцированного** сообщения.
- Технически это «двоюродные» виды модуляции.

6.5 Индекс модуляции

- Для тона $u(t) = \cos(2\pi f_m t)$: при ЧМ $\beta = \Delta f / f_m$.
- β — **индекс модуляции**; определяет, сколько боковых существенно.
- $\beta < 1$ — узкополосная ЧМ; $\beta \gg 1$ — широкополосная.

6.6 Почему ЧМ устойчивее

- Амплитуда постоянна → амплитудные помехи подавляются **ограничителем**.
 - Информация в частоте/фазе, а не в амплитуде.
 - Цена — шире полоса.
-

7. Спектр ЧМ

7.1 Разложение по Бесселю

- Для тона: $s(t) = A \cdot \sum J_k(\beta) \cdot \cos(2\pi(f_c + k \cdot f_m)t)$.
- $J_k(\beta)$ — функции Бесселя первого рода порядка k .
- Боковых **бесконечно много**, но амплитуды быстро падают.

7.2 Свойства спектра

- Симметрия: боковые с шагом f_m по обе стороны от f_c .
- Число заметных боковых $\approx 2(\beta + 1)$.
- Чем больше β , тем шире «расходящийся» спектр.

- При некоторых β несущая может обратиться в ноль ($J_0(\beta) = 0$).

7.3 Узкополосная и широкополосная ЧМ

- $\beta \ll 1$ (NBFM): полоса и структура как у АМ.
- $\beta \gg 1$ (WBFM): широкая полоса, высокая помехоустойчивость.
- FM-радио — широкополосная ЧМ.

7.4 Правило Карсона

- Полоса: $B \approx 2(\beta + 1) \cdot f_m = 2(\Delta f + f_m)$.
- При больших β : $B \approx 2 \cdot \Delta f$.
- Пример (FM-радио): $\Delta f = 75$ кГц, $f_m = 15$ кГц $\rightarrow B \approx 180$ кГц.

7.5 Примеры

- FM-радио: 88–108 МГц, полоса станции ≈ 200 кГц.
- Радиомикрофоны, телеметрия — ЧМ/ФМ.
- PMR/DMR — цифровая ЧМ (FSK/4FSK).

8. Сравнение АМ, ЧМ и ФМ

Свойство	АМ	ЧМ	ФМ
Меняется	амплитуда	частота	фаза
Амплитуда сигнала	переменная	постоянная	постоянная
Полоса	$2 \cdot f_m$	$2(\beta+1) \cdot f_m$	зависит от k_p
Помехоустойчивость	ниже	выше	выше
Приём	простой	сложнее	сложнее
Применение	вещание, авиация	FM-радио, связь	телеметрия

- Все три можно свести к общему виду с комплексной огибающей $g(t)$.
- На практике выбор — компромисс «полоса $\leftrightarrow$ помехоустойчивость $\leftrightarrow$ сложность».

9. Цифровая модуляция

9.1 Зачем цифровая модуляция

- Сообщение — последовательность бит.
- Нужно передать её по аналоговому каналу.
- Каждый **символ** несёт целое число бит.

9.2 Базовые виды

- **ASK** — переключение амплитуды (по сути АМ без несущей).
- **FSK** — переключение частоты.
- **PSK** — переключение фазы.

9.3 BPSK и QPSK

- **BPSK**: две фазы (0 и π) $\rightarrow$ 1 бит/символ.
- **QPSK**: четыре фазы $\rightarrow$ 2 бита/символ.
- QPSK = две BPSK на I и Q.
- QPSK-сигнал: $s(t) = I \cdot \cos(2\pi f_c t) - Q \cdot \sin(2\pi f_c t)$.

9.4 QAM

- Комбинирует амплитуду и фазу.
- 16-QAM $\rightarrow$ 4 бита/символ; 64-QAM $\rightarrow$ 6 бит/символ.
- Созвездие — квадратная сетка точек (I, Q).
- Чем плотнее сетка, тем выше скорость и ниже помехоустойчивость.

9.5 Созвездия

- Каждому символу — точка на комплексной плоскости.
- **Минимальное расстояние** между точками определяет вероятность ошибки.
- Приёмник выбирает ближайшую точку (по метрике).

9.6 Спектральная эффективность

Схема	бит/символ	Относительная скорость	Помехоустойчивость
BPSK	1	низкая	высокая
QPSK	2	средняя	хорошая
16-QAM	4	высокая	средняя
64-QAM	6	очень высокая	низкая

- Теоретически достижимая эффективность ограничена (предел Шеннона).
- Реальные системы **адаптивно** меняют схему под условия (Wi-Fi, LTE).

9.7 Грей-кодирование

- Соседние точки созвездия отличаются **одним** битом.
- Тогда одиночная ошибка символа искажает 1 бит, а не несколько.
- Стандарт для QAM/PSK.

9.8 Помехоустойчивость (словами)

- Для BPSK вероятность ошибки ниже, чем для QPSK при том же ОСШ.
- Для QAM требуется больший ОСШ, чтобы «различить» близкие точки.
- Отсюда — адаптивная модуляция и кодирование (AMC).

9.9 OFDM и много несущих (мостик)

- Вместо одной быстрой несущей — много медленных (OFDM).
- Основа Wi-Fi, LTE, DVB.

10. Формирующий фильтр и межсимвольная интерференция

10.1 Проблема

- Если символы прямоугольные, их спектр — широкий sinc.
- Символы «размазываются» на соседние → **межсимвольная интерференция (МСИ)**.
- МСИ ухудшает приём.

10.2 Критерий Найквиста

- Отсчёты в моменты съёма не должны «видеть» соседние символы.
- Форма импульса должна иметь **нули** в точках съёма других символов.

10.3 Приподнятый косинус

- Специальная форма импульса: убирает МСИ и ограничивает полосу.
- Параметр α — **коэффициент сглаживания** (roll-off, 0...1).
- Полоса: $B = (1 + \alpha)/(2 \cdot T_s)$ для символьной скорости $1/T_s$.
- $\alpha = 0$ — минимальная полоса, но резкая АЧХ; $\alpha = 1$ — шире, но плавнее.

10.4 Глаз-диаграмма

- Наглядная проверка качества: «глаз» открыт — символы различаются.
- «Глаз» закрывается при МСИ и шуме.

10.5 Итог

- Формирующий фильтр — обязательная часть цифрового передатчика.
 - В приёмнике — согласованный фильтр (мостик к лекции 6).
-

11. OFDM: много поднесущих

11.1 Идея

- Делим широкую полосу на много узких **ортогональных** поднесущих.
- На каждой — медленная модуляция (QPSK/QAM).
- Сумма поднесущих даёт почти прямоугольный спектр.

11.2 Ортогональность

- Частоты поднесущих кратны $1/T$: $f_k = k/T$.
- Пики одной поднесущей попадают в нули других.
- Поэтому поднесущие не мешают друг другу.

11.3 Связь с БПФ

- Модуляция — **обратное БПФ** (IFFT).
- Демодуляция — **прямое БПФ** (FFT).
- Лекция 4 оказывается прямо нужна здесь.

11.4 Циклический префикс

- Копия конца символа в начало.
- Защищает от многолучёвости (межсимвольной и межканальной помехи).

11.5 Достоинства и недостатки

- Плюсы: устойчивость к многолучёвости, гибкость, эффективное БПФ.
 - Минусы: высокий **пик-фактор** (PAPR), чувствительность к сдвигу частоты.
 - Применение: Wi-Fi, LTE/5G, DVB, DAB.
-

12. I/Q на практике (SDR)

12.1 Тракт SDR

- Аналоговая часть: усилитель, смеситель, АЦП.
- Цифровая часть: фильтрация, демодуляция, декодирование.
- Между ними — поток комплексных I/Q.

12.2 Зеркальный отклик

- Дисбаланс I/Q создаёт «копию» сигнала на зеркальной частоте.
- Мешает приёму; искажает созвездие.
- Лечение: калибровка, цифровая коррекция.

12.3 Частотная и фазовая синхронизация

- Частотная: компенсация сдвига несущей.
- Фазовая: точное «вращение» созвездия.
- Без них QAM не демодулируется.

12.4 Практический вывод

- Реальные приёмники работают с комплексными числами.
 - Понимание I/Q — обязательное условие работы с SDR.
-

13. Модуляция в проекте: RFID и обратное рассеяние

13.1 Как работает UHF RFID

- Ридер излучает несущую (например, 866 МГц).
- Метка **отражает** часть мощности, меняя амплитуду/фазу (backscatter).
- Это и есть пассивная модуляция отражённого сигнала (ASK/PSK).

13.2 Что принимает ридер

- **RSSI** — уровень отражённого сигнала (амплитуда).
- **Фаза** — фаза отражённой волны.
- По фазе можно оценивать дальность и перемещение.

13.3 Фаза и дальность

- Фаза растёт с дальностью: $\varphi = 2\pi \cdot 2d/\lambda \pmod{2\pi}$.
- На 866 МГц $\lambda \approx 34.6$ см — фаза «прокручивается» каждые ~17 см.
- Периодичность даёт **неоднозначность**, которую разрешают методами слежения.

13.4 Связь с курсом

- Модуляция — «кто» (идентификация) и «где» (локализация).
 - Далее: слияние с LiDAR и фильтр Калмана (лекции 6 и 9).
-

14. Python: как это считать

14.1 Генерация АМ

- Время t , сообщение, несущая, умножение; спектр через `rfft + rfftfreq`.
- Окно Hann перед БПФ, чтобы уменьшить утечку.

14.2 Генерация ЧМ

- Фаза — интеграл мгновенной частоты (`np.cumsum`).
- Спектр: боковые с шагом f_m ; сверить с `scipy.special.jv`.

14.3 Цифровые созвездия

- Массивы комплексных символов; `scatter` для созвездия.
- Модуляция символов → RC-фильтр (`scipy.signal`) → сигнал.

14.4 I/Q и демодуляция

- Умножить на $\cos/-\sin$, отфильтровать (ФНЧ), получить I и Q.
- Восстановить амплитуду и фазу; сравнить с исходными.

14.5 Полезные функции

- `numpy.fft` / `scipy.fft`, `scipy.signal.get_window`, `scipy.signal.firwin`, `scipy.special.jv`, `matplotlib`.
-

15. Шпаргалка (словарь)

Термин	Что означает
Несущая	высокочастотное колебание-«носитель»
Модуляция	изменение параметра несущей по сообщению
Комплексная огибающая	$g(t) = I + jQ$, «медленная» часть
I/Q	синфазная и квадратурная компоненты
Аналитический сигнал	сигнал без отрицательных частот
AM	амплитудная модуляция
DSB-SC	две боковые, несущая подавлена
SSB	одна боковая
ЧМ / ФМ	частотная / фазовая модуляция
Девияция	размах изменения частоты Δf
Индекс модуляции	$\beta = \Delta f / f_m$
Функции Бесселя	описывают боковые ЧМ
Правило Карсона	$B \approx 2(\Delta f + f_m)$
ASK/FSK/PSK	цифровые амплитуда/частота/фаза
Созвездие	точки символов на плоскости I/Q
QAM	амплитудно-фазовая цифровая модуляция
МСИ	межсимвольная интерференция
Приподнятый косинус	формирующий импульс без МСИ
OFDM	много ортогональных поднесущих
PAPR	пик-фактор
Backscatter	обратное рассеяние (RFID)
RSSI	уровень принятого сигнала

16. Частые ошибки и заблуждения

- «Модуляция добавляет информацию».
 - Нет; информация уже в сообщении, модуляция лишь переносит её по частоте.
- «У AM вся мощность полезная».
 - Нет; при $m = 1$ КПД лишь ~33%.
- «У ЧМ узкий спектр».
 - Наоборот, широкополосная ЧМ занимает много полосы.
- «Число боковых у ЧМ конечно».
 - Формально бесконечно; практически быстро падают (Бессель).
- «QAM — это просто PSK».
 - QAM меняет и амплитуду, и фазу.
- «Чем плотнее созвездие, тем лучше».
 - Быстрее, но менее помехоустойчиво.
- «OFDM — это просто много AM».
 - Поднесущие ортогональны; реализуется через БПФ.
- «I/Q — только для сложных систем».
 - Это базовое представление любого современного радио.
- «Форма импульса не важна».
 - Без формирующего фильтра — МСИ и широкий спектр.

17. Вопросы и развёрнутые ответы

1. **Зачем нужна модуляция?** Чтобы эффективно излучать (размер антенны) и разносить каналы по частоте.
2. **Что такое несущая?** Высокочастотное колебание, параметры которого меняются по сообщению.
3. **Что такое комплексная огибающая?** $g(t) = I + jQ$ — «медленная» комплексная часть сигнала без несущей.
4. **Как связаны I/Q и амплитуда/фаза?** $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$, $\varphi = \arctan(Q/I)$.
5. **Какие составляющие в спектре АМ?** Несущая и две боковые; полоса $2 \cdot f_m$.
6. **Когда наступает перемодуляция?** При $m > 1$; огибающая искажается, детектор «рвёт» сигнал.
7. **Чем DSB-SC и SSB выгоднее АМ?** Не тратят мощность на несущую; SSB ещё и сужает полосу вдвое.
8. **Что такое девиация и индекс модуляции ЧМ?** Δf — размах частоты; $\beta = \Delta f / f_m$ — индекс.
9. **Чем описывается спектр ЧМ?** Функциями Бесселя $J_k(\beta)$; боковые с шагом f_m .
10. **Что даёт правило Карсона?** Оценку полосы: $B \approx 2(\Delta f + f_m)$.
11. **Почему ЧМ помехоустойчивее АМ?** Амплитуда постоянна; амплитудные помехи подавляются ограничителем.
12. **Сколько бит на символ в BPSK/QPSK/16-QAM?** 1, 2 и 4 бита соответственно.
13. **Зачем Грей-кодирование?** Чтобы соседние точки созвездия отличались одним битом.
14. **Зачем формирующий фильтр?** Ограничить полосу и убрать межсимвольную интерференцию.
15. **Что такое OFDM и при чём тут БПФ?** Много ортогональных поднесущих; модуляция — IFFT, демодуляция — FFT.
16. **Что даёт анализ I/Q в RFID?** RSSI («кто/насколько близко») и фазу («где»), основу локализации.

18. Радиодиапазоны и длина волны

- Длина волны: $\lambda = c / f$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.
- Чем выше частота, тем короче волна — и тем меньше нужна антенна.
- Основные диапазоны:

Диапазон	Частоты	λ (порядок)	Примеры
LF	30–300 кГц	км	длинные волны, «маяки»
MF	0.3–3 МГц	сотни м	АМ-радио
HF	3–30 МГц	десятки м	короткие волны, связь
VHF	30–300 МГц	метры	FM-радио, DAB, авиация
UHF	0.3–3 ГГц	дециметры	TB, Wi-Fi, LTE, RFID, GPS
SHF	3–30 ГГц	см	Wi-Fi 5 ГГц, радары, спутник
EHF	30–300 ГГц	мм	5G mmWave, радиоастрономия

- Пример: 866 МГц (UHF RFID) $\rightarrow \lambda \approx 34.6$ см.
- Пример: 100 МГц (FM) $\rightarrow \lambda \approx 3$ м.
- Нижние частоты: далеко и огибают препятствия, но нужны огромные антенны.
- Верхние частоты: компактные антенны и широкая полоса, но хуже «пробивают».

19. Антенны и излучение (кратко)

- Простейшая антенна — **полуволновый диполь** (длина $\approx \lambda/2$).
 - Размер антенны должен быть сравним с λ — отсюда важность несущей.
 - **Коэффициент усиления** (gain) — направленность излучения.
 - **Диаграмма направленности** — куда «смотрит» антенна.
 - **Согласование** по импедансу — иначе мощность отражается назад.
 - Антенна обратима: одна и та же работает на передачу и приём.
 - MIMO (несколько антенн) — основа Wi-Fi/LTE/5G (затравка к лекции 10).
-

20. Преобразование частоты и супергетеродин

20.1 Смеситель

- **Смеситель** перемножает вход с сигналом гетеродина f_g .
- Результат — компоненты на $f_c + f_g$ и $f_c - f_g$.
- Одна из них — **полезная** (разностная или суммарная).
- Так сигнал переносят на удобную частоту.

20.2 Супергетеродин

- Принимаемый сигнал переносят на **промежуточную частоту** (IF).
- На IF проще фильтровать, усиливать, демодулировать.
- Исторически — основной тип приёмника.

20.3 Зеркальный канал (image)

- Смеситель одинаково переносит и «полезную», и **зеркальную** частоту.
- Зеркальная — та, что даёт ту же разность с гетеродином.
- Подавляется **входным фильтром** и выбором IF.
- Связано с дисбалансом I/Q (зеркальный отклик), но это разные механизмы.

20.4 Приёмник прямого преобразования (zero-IF)

- Переносим сразу на 0 Гц — получаем I/Q.
 - Так работают SDR и современные чипы.
 - Плюс: нет каскада IF, проще интеграция.
 - Минусы: проблема DC-смещения и дисбаланса I/Q.
-

21. Синхронизация в цифровом приёмнике

- Принятый сигнал «плывёт» по частоте и фазе — их надо восстановить.
- **Частотная синхронизация**: компенсация сдвига несущей.
- **Фазовая синхронизация**: правильное «вращение» созвездия (Costas, ФАПЧ).
- **Тактовая синхронизация**: выбор моментов съёма символов.
- **Эквалайзер**: компенсация искажений канала (многолучёвость).
- Без синхронизации QAM/OFDM демодулировать нельзя.

- Это «невидимая» часть радио, без которой всё остальное не работает.

22. Помехоустойчивость и вероятность ошибки

- Качество цифрового канала — вероятность битовой ошибки **BER**.
- BER зависит от отношения **энергии на бит к спектральной плотности шума** E_b/N_0 (или от ОСШ).
- Чем плотнее созвездие, тем выше нужный E_b/N_0 :

Схема	бит/символ	Относительный требуемый ОСШ
BPSK	1	самый низкий
QPSK	2	ниже среднего
16-QAM	4	средний
64-QAM	6	высокий

- **Адаптивная модуляция и кодирование (AMC):** схему меняют под условия.
- **Кодирование** (свёрточное, LDPC, Turbo) позволяет приблизиться к пределу Шеннона — «обменять» избыточность на помехоустойчивость.
- Грей-кодирование снижает число битовых ошибок на одну символьную.

23. Расширение спектра: DSSS и FHSS

- **DSSS** (direct sequence): сигнал умножают на быстрый **псевдослучайный код**, спектр «расширяется».
- Приёмник «сжимает» обратно **согласованным фильтром/коррелятором**; помехи расширяются и ослабляются.
- **FHSS** (frequency hopping): несущая быстро «прыгает» по частотам.
- Плюсы: помехоустойчивость, скрытность, множественный доступ (CDMA).
- Примеры: GPS (DSSS/CDMA), Bluetooth (FHSS), RFID (по стандартам — FHSS).
- Мостик: измерить дальность по задержке кода (лекция 1) — корреляция (лекция 6).

24. Реальные системы: что чем модулируется

Система	Модуляция	Полоса (порядок)	Комментарий
AM-радио	AM	~9 кГц	историческая простота
FM-радио	WBFM	~180–200 кГц	высокое качество, помехоустойчивость
DAB	OFDM + DQPSK	~1.5 МГц	цифровое радио
DVB-T	OFDM + QAM	6–8 МГц	цифровое ТВ
Wi-Fi (802.11)	OFDM + QAM	20–160 МГц	адаптивная модуляция

Система	Модуляция	Полоса (порядок)	Комментарий
Bluetooth	GFSK, $\pi/4$ -DQPSK	1 МГц	FHSS
GSM	GMSK	200 кГц	постоянная огибающая
LTE/5G	OFDM/OFDMA + QAM	1.4–100 МГц	AMC, MIMO
GPS	BPSK + DSSS	~2 МГц	дальность по коду
UHF RFID	ASK/PSK (backscatter)	~200 кГц	пассивная метка

- Вывод: в основе почти всего — АМ/ФМ/PSK/QAM и их комбинации.
- Современные системы добавляют OFDM, кодирование и адаптацию.

25. Измерения и контроль качества

- **Спектроанализатор:** смотрит спектр в реальном времени (панорама).
- **Маска спектра:** допустимые границы излучения по стандарту.
- **EVM** (error vector magnitude): насколько точки созвездия «размазаны».
- **Созвездие** на экране прибора — быстрый контроль качества.
- **RSSI / SNR:** уровень и качество принимаемого сигнала.
- **Водопад (spectrogram):** видно помехи и перестройку во времени.
- Практический навык: уметь читать эти измерения и делать вывод.

26. Мини-эксперименты в Python

1. Сгенерировать АМ (тон) и убедиться, что в спектре несущая + 2 боковые.
 2. Сгенерировать ЧМ и сравнить число боковых с функциями Бесселя J_n .
 3. Построить созвездия BPSK/QPSK/16-QAM (с Грей-кодированием).
 4. Пропустить символы через приподнятый косинус и посмотреть «глаз».
 5. Смодулировать на несущую, получить I/Q, демодулировать обратно.
 6. Добавить шум и измерить BER для BPSK/QPSK при разных ОСШ.
 7. Сделать OFDM из N поднесущих через IFFT и увидеть спектр.
 8. Смоделировать backscatter-сигнал RFID и оценить фазу и дальность.
- Все эксперименты — на numpy/scipy/matplotlib, без тяжёлых библиотек.

27. План рассказа на 2 академических часа

1. **10 мин.** Зачем модуляция; несущая; разнесение каналов.
2. **15 мин.** Комплексная огибающая и I/Q; квадратурный демодулятор.
3. **15 мин.** АМ: сигнал, спектр, глубина, КПД, варианты DSB/SSB.
4. **20 мин.** ЧМ/ФМ: мгновенная частота, индекс, функции Бесселя, Карсон.
5. **20 мин.** Цифровая модуляция: ASK/FSK/PSK, BPSK/QPSK/QAM, созвездия.
6. **15 мин.** Формирующий фильтр и МСИ; OFDM как мостик к БПФ.

7. **15 мин.** I/Q в SDR; RFID (RSSI/фаза); практика в Python; задание.

- **Приём:** каждую схему сразу показывать на графике.
 - Давать «до/после»: сообщение → модуляция → спектр → демодуляция.
-

28. Итог

- Модуляция переносит спектр сигнала на несущую.
 - Комплексная огибающая и I/Q — универсальный язык радио.
 - АМ: несущая + две боковые; варианты DSB-SC, SSB.
 - ЧМ/ФМ: индекс модуляции, спектр Бесселя, правило Карсона.
 - Цифровая модуляция: ASK/FSK/PSK, созвездия BPSK/QPSK/QAM.
 - Формирующий фильтр убирает МСИ; OFDM строится через БПФ.
 - Всё это напрямую используется в проекте (RFID, Wi-Fi, SDR).
-

29. Что дальше

- **Лекция 6:** свёртка, корреляция и линейные системы — импульсная характеристика, передаточная функция, Z-преобразование, устойчивость.
 - На практике — генерация и демодуляция сигналов в Python.
 - В проекте — спектр и I/Q превращаются в признаки и оценку состояния.
-

Приложения

30. Формулы — словами (откуда что берётся)

30.1 Почему у АМ появляются две боковые

- Запишем сообщение через Эйлера: $\cos(2\pi f_m t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j2\pi f_m t} + e^{-j2\pi f_m t})$.
- АМ: $s = (1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_c t)$.
- Несущая часть $\cos(2\pi f_c t)$ даёт линию на f_c (и $-f_c$).
- Произведение $\cos f_m \cdot \cos f_c$ по формуле: $= \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + \cos(2\pi(f_c + f_m)t)]$.
- Отсюда **две боковые:** $f_c - f_m$ и $f_c + f_m$.
- Вывод: боковые — прямое следствие того, что сообщение «модулирует» несущую.

30.2 Откуда КПД АМ

- Для тона $m \cdot \cos(2\pi f_m t)$ амплитуда каждой боковой $m/2$.
- Мощность пропорциональна квадрату амплитуды:
 - несущая: 1;
 - обе боковые: $2 \cdot (m/2)^2 = m^2/2$.
- Полная мощность: $1 + m^2/2$.
- **КПД** = полезное / полное = $(m^2/2) / (1 + m^2/2) = m^2 / (2 + m^2)$.

- При $m = 1: 1/3 \approx 33\%$; при $m = 0.5: 0.25/2.25 \approx 11\%$.
- Всё остальное — несущая, которая информации не несёт.

30.3 Откуда функции Бесселя

- ЧМ-сигнал: $\cos(2\pi f_c t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t))$.
- Это «косинус от синуса» — не табличная функция.
- Его раскладывают в ряд по гармоникам $f_c + k \cdot f_m$: $= \sum J_k(\beta) \cdot \cos(2\pi(f_c + k \cdot f_m)t)$.
- Коэффициенты $J_k(\beta)$ — **функции Бесселя** первого рода.
- Так появляется «расходящийся» дискретный спектр ЧМ.
- Амплитуды падают; при некоторых β отдельные J_k равны нулю.

30.4 Откуда правило Карсона

- Основная энергия ЧМ сосредоточена в боковых с $|k| \leq \beta + 1$.
- Отсюда число заметных боковых $\approx 2(\beta + 1)$.
- Каждая боковая отстоит на $f_m \rightarrow$ полоса $\approx 2(\beta + 1) \cdot f_m$.
- Так как $\beta \cdot f_m = \Delta f$, получаем $B \approx 2(\Delta f + f_m)$.
- При $\beta \gg 1$: $B \approx 2\Delta f$.

30.5 Связь ЧМ и ФМ

- ФМ: $\varphi(t) = k_p \cdot u(t)$ — фаза «повторяет» сообщение.
- ЧМ: $f(t) = f_c + k_f \cdot u(t)$ — частота «повторяет» сообщение.
- Фаза — интеграл частоты, поэтому:
 - ЧМ = ФМ от **интеграла** сообщения;
 - ФМ = ЧМ от **производной** сообщения.
- Поэтому их спектры похожи, а схемы взаимозаменяемы с предсказанием.

30.6 Комплексная огибающая: вывод I/Q

- Пусть $g(t) = I(t) + j \cdot Q(t)$.
- $g(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} = (I + jQ)(\cos + j \cdot \sin)$.
- Реальная часть: $\text{Re}\{\dots\} = I \cdot \cos(2\pi f_c t) - Q \cdot \sin(2\pi f_c t)$.
- Это и есть квадратурная форма; I и Q — координаты вектора в базисе $\{\cos, -\sin\}$.
- Отсюда видно: любая модуляция (АМ/ФМ/ЧМ) — это траектория точки (I, Q) .

30.7 Почему QPSK — это две BPSK

- QPSK передаёт 2 бита: один на I , другой на Q .
- Каждый канал — независимая BPSK.
- Поэтому QPSK = BPSK(I) + BPSK(Q), сдвинутые на 90° .
- Отсюда одинаковая полоса, но вдвое большая скорость.
- Обобщение: QAM = многопозиционные ASK на I и Q .

30.8 Критерий Найквиста словами

- Хотим, чтобы в момент съёма $n \cdot T_s$ отклик от других символов был нулевым.

- Значит, форма импульса должна иметь **нули** в точках $n \cdot T_s$.
- $\text{sinc}(x)$ этим свойством обладает, но у него бесконечные «хвосты» и широкая полоса.
- Приподнятый косинус сохраняет нули, но быстрее спадает по частоте.
- Компромисс задаёт α (roll-off).

31. Числовые примеры и таблицы

31.1 КПД АМ

Глубина m	КПД $m^2 / (2 + m^2)$
0.3	$\approx 4.3\%$
0.5	$\approx 11\%$
0.8	$\approx 24\%$
1.0	$\approx 33\%$
1.2	перемодуляция (недопустимо)

31.2 Спектр АМ (тон)

- Несущая f_c , боковые $f_c \pm f_m$.
- Амплитуды: несущая 1, боковые $m/2$.
- Полоса $2 f_m$.

31.3 Функции Бесселя (ориентиры)

- $\beta = 1$: заметны $J_0 \dots J_3$ (мало боковых, узкая полоса).
- $\beta = 5$: заметны примерно $J_0 \dots J_8$ (широкий спектр).
- $J_0(\beta)$ периодически обращается в ноль — несущая «исчезает».

31.4 Полоса ЧМ по Карсону

Δf	f_m	β	$B \approx 2(\Delta f + f_m)$
5 кГц	5 кГц	1	20 кГц
25 кГц	5 кГц	5	60 кГц
75 кГц	15 кГц	5	180 кГц
2.5 кГц	2.5 кГц	1	10 кГц

31.5 FM-радио в числах

- Девиация $\Delta f = 75$ кГц; максимальная звуковая $f_m = 15$ кГц.
- $\beta = 5$; полоса $\approx 180\text{--}200$ кГц; полосы станций разнесены.
- Пилот 19 кГц (стерео) — мостик к лекции 1.

31.6 Длины волн

Частота	$\lambda = c/f$	Пример
100 МГц	3 м	FM-радио
433 МГц	69 см	ISM-связь
866 МГц	34.6 см	UHF RFID
2.4 ГГц	12.5 см	Wi-Fi/Bluetooth
5.8 ГГц	5.2 см	Wi-Fi 5 ГГц

31.7 Требуемый ОСШ (ориентиры)

Схема	бит/символ	Относительный требуемый ОСШ
BPSK	1	минимальный
QPSK	2	+3 дБ к BPSK
16-QAM	4	заметно выше
64-QAM	6	ещё выше (десятки дБ)

- Точные значения — из кривых BER; важен порядок и тренд.

31.8 Приподнятый косинус

- Полоса $B = (1 + \alpha)/(2 T_s)$.
- $\alpha = 0$ — узкая полоса, резкая АЧХ; $\alpha = 0.35$ — типично (DVB, спутник).
- $\alpha = 1$ — шире вдвое, но плавные фронты и лучше допуски.

32. Ещё вопросы (продолжение)

1. **Почему антенна требует размер $\sim \lambda$?** Чтобы эффективно преобразовать ток в волну; при размерах $\ll \lambda$ КПД резко падает.
2. **Что такое длина волны?** $\lambda = c/f$ — расстояние между двумя гребнями.
3. **Зачем промежуточная частота?** На ней удобнее фильтровать и усиливать.
4. **Что такое зеркальный канал?** Частота, дающая ту же разность с гетеродином.
5. **Зачем нужна синхронизация?** Без неё «плывут» частота, фаза и такт.
6. **Что такое OFDM-префикс?** Защитный интервал против многолучёвости.
7. **Почему у OFDM высокий пик-фактор?** Сумма многих поднесущих иногда «складывается».
8. **Что такое EVM?** Разброс точек созвездия — интегральная мера качества.
9. **Чем DSSS помогает?** Расширяет спектр кодом; приёмник сжимает сигнал обратно.
10. **Почему GPS требует корреляции?** Сигнал слабый и широкополосный; нужен согласованный фильтр (лекция 6).
11. **Что такое backscatter?** Отражение с изменением амплитуды/фазы (RFID).
12. **Чем отличается ASK от AM?** ASK — цифровая (дискретные уровни), AM — аналоговая.
13. **Почему GMSK применяют в GSM?** Постоянная огибающая, узкий спектр, дешёвый усилитель.
14. **Что такое адаптивная модуляция?** Смена схемы под условия канала (AMC).
15. **Где в курсе используется эта лекция?** RFID, Wi-Fi, OFDM — в проекте и лекциях 6–10.

33. Как читать слайды Lecture05 (по шагам)

- «Зачем модуляция» — показано, как два сигнала расходятся по частоте.
 - «I/Q» — вектор на комплексной плоскости; I и Q как проекции.
 - «АМ-сигнал» — несущая, сообщение, огибающая, сам АМ.
 - «Спектр АМ» — несущая и две боковые на «палочках».
 - «Глубина модуляции» — $m=0.5, 1.0, 1.5$.
 - «DSB/SSB» — как меняется спектр при подавлении несущей/боковой.
 - «ЧМ-сигнал» — сообщение → мгновенная частота → фаза.
 - «Спектр ЧМ» — боковые по Бесселю для $\beta=1$ и $\beta=5$.
 - «Карсон» — кривая полосы от β .
 - «ASK/FSK/PSK» — три модуляции для одной битовой последовательности.
 - «Созвездия» — BPSK/QPSK/16-QAM.
 - «Приподнятый косинус» — импульс и его спектр.
 - «OFDM» — сумма поднесущих почти в «кирпич».
 - «RFID-фаза» — пила фазы по дальности.
-

34. Типичные ошибки в коде (Python/SciPy)

- Забыли умножить на 2π при расчёте фазы ($\cos(2\pi f t)$, не $\cos(f t)$).
 - Для ЧМ задают мгновенную частоту через $\cos(2\pi f t)$, а надо — через **интеграл** (cumsum).
 - Перепутали символьную частоту ($1/T_s$) и частоту отсчётов (f_s).
 - Применили формирующий фильтр **дважды** (передающая и приёмная стороны).
 - Нормируют созвездие по-разному при сравнении (средняя мощность должна совпадать).
 - Забыли про центрирование спектра (fftshift) при взгляде на $-f$.
 - Смотрят спектр без окна и удивляются утечке.
 - Считают BER по символам, а не по битам (при Грей-кодировании это разные вещи).
 - Моделируют АМ с $m > 1$ и получают «странную» огибающую — это перемодуляция.
-

35. Чек-лист проектирования радиоканала

1. Определить **полосу** и **скорость** сообщения.
 2. Выбрать **диапазон/несущую** (лицензии, дальность, размер антенны).
 3. Выбрать **модуляцию** (АМ/ЧМ/PSK/QAM) под ОСШ и требования.
 4. Выбрать **формирующий фильтр** (roll-off) и полосу.
 5. Заложить **синхронизацию** (частотную, фазовую, тактовую).
 6. Оценить **отношение сигнал/шум** и **энергетический бюджет** (link budget).
 7. Продумать **помехоустойчивость** (кодирование, расширение спектра).
 8. Проверить **регуляторные ограничения** (маска спектра).
 9. Смоделировать в Python, измерить BER/EVM.
 10. Проверить на железе (SDR, отладочная плата).
-

36. Аналогии и метафоры

- **Несущая** — поезд, а сигнал — пассажир: поезд едет быстро, пассажир «медленный».

- **Модуляция** — смена «окраски» поезда по сообщению.
 - **АМ** — яркость фонаря меняется; **ЧМ** — «дрожит» высота свистка.
 - **I/Q** — координаты X и Y, которыми можно задать любую точку.
 - **Созвездие** — «алфавит» из точек; приёмник читает ближайшую букву.
 - **Формирующий фильтр** — «сглаживание букв», чтобы не сливались.
 - **OFDM** — оркестр из многих тихих инструментов вместо одного громкого.
 - **Расширение спектра** — шёпот многих голосов: по отдельности неслышно, вместе — сигнал.
 - **Супергетеродин** — «перевод» на понятный язык (промежуточную частоту).
-

37. История радио и модуляции (кратко)

- 1860-е: уравнения Максвелла предсказывают радиоволны.
 - 1887: Герц экспериментально показывает волны.
 - 1895–1901: Маркони — беспроводная связь через Атлантику.
 - 1906: Фессенден — первое аудио-радиовещание (АМ).
 - 1930-е: Армстронг — широкополосная **ЧМ**, борьба с помехами.
 - 1940-е: Шеннон — теория информации и предел пропускной способности.
 - 1960–70-е: цифровая связь, PSK/QAM.
 - 1990-е: OFDM в DAB/DVB; затем Wi-Fi и LTE.
 - 2000-е: SDR — обработка I/Q в цифре.
 - Вывод: современные методы — эволюция идей АМ/ЧМ + БПФ + теория информации.
-

38. Инструменты: SDR и стек

- **Аппаратура SDR**: RTL-SDR (приём), HackRF, USRP, PlutoSDR.
 - **Программы**: GNU Radio, SDR#, GQRX, Inspectrum.
 - **Python**: numpy/scipy (генерация, фильтры, БПФ), matplotlib (созвездия, водопады).
 - **Библиотеки связи**: comm (быстрая демодуляция), готовые блоки GNU Radio.
 - **Учебное**: pySDR — практическое введение в I/Q и демодуляцию.
 - В курсе достаточно numpy/scipy; SDR — для проекта и лабораторий.
-

39. Связь с другими лекциями курса

- **Лекция 1** — оцифровка; пилот 19 кГц, сигналы вокруг нас.
 - **Лекция 2** — спектры АМ/ЧМ как примеры гармонического анализа.
 - **Лекция 3** — ДПФ: как считать спектр модулированного сигнала.
 - **Лекция 4** — БПФ, окна, PSD: инструмент анализа; OFDM строится на БПФ.
 - **Лекция 5** — модуляция и I/Q (сегодня).
 - **Лекция 6** — свёртка и корреляция: согласованный фильтр, приём.
 - **Лекции 7–8** — фильтры: формирующий и согласованный.
 - **Лекция 9** — статистика и Калман: слежение по фазе RFID.
 - **Лекция 10** — многомерная обработка: решётки, MIMO.
-

40. Итог одной страницей

- Модуляция переносит спектр на несущую: $s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\}$.
 - $g(t) = I + jQ$ — комплексная огибающая; I/Q — базис любого радио.
 - АМ: несущая + две боковые, полоса $2f_m$, КПД $\leq 33\%$; есть DSB-SC и SSB.
 - ЧМ/ФМ: индекс β , спектр Бесселя, полоса Карсона $2(\Delta f + f_m)$.
 - Цифра: ASK/FSK/PSK, созвездия BPSK/QPSK/QAM, Грей-код.
 - Формирующий фильтр убирает МСИ; OFDM = много поднесущих через IFFT/FFT.
 - SDR работает в I/Q; RFID — backscatter, RSSI и фаза.
 - Всё это — прямой вход в проект и в лекции 6–10.
-

41. Формульная шпаргалка (формула → смысл)

- $\lambda = c / f \rightarrow$ длина волны; определяет размер антенны.
 - $s(t) = \text{Re}\{g(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\} \rightarrow$ реальный сигнал через комплексную огибающую.
 - $g(t) = I + jQ \rightarrow$ комплексная огибающая; I и Q — квадратуры.
 - $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$, $\varphi = \arctan(Q/I) \rightarrow$ амплитуда и фаза.
 - $s(t) = I \cdot \cos(2\pi f_c t) - Q \cdot \sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ квадратурная форма.
 - $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \rightarrow$ откуда боковые АМ.
 - $s_{\text{AM}} = (1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_c t) \rightarrow$ АМ-сигнал.
 - $\eta = m^2 / (2 + m^2) \rightarrow$ КПД АМ.
 - $f(t) = f_c + k_f \cdot u(t) \rightarrow$ мгновенная частота ЧМ.
 - $\varphi(t) = 2\pi k_f \int u(\tau) d\tau \rightarrow$ фаза как интеграл сообщения.
 - $\beta = \Delta f / f_m \rightarrow$ индекс модуляции ЧМ.
 - $s_{\text{ЧМ}} = A \cdot \sum J_k(\beta) \cdot \cos(2\pi(f_c + k f_m)t) \rightarrow$ спектр ЧМ (Бессель).
 - $B \approx 2(\Delta f + f_m) \rightarrow$ правило Карсона.
 - $B = (1 + \alpha)/(2 T_s) \rightarrow$ полоса при приподнятом косинусе.
 - $f_k = k/T \rightarrow$ ортогональные поднесущие OFDM.
 - IFFT/FFT $\rightarrow$ модуляция/демодуляция OFDM.
 - $\varphi = 2\pi \cdot 2d/\lambda \rightarrow$ фаза обратного рассеяния (RFID).
-

42. Мини-лаборатория (что сделать в Python)

1. Сгенерировать АМ с $m = 0.5$ и $m = 1.0$; сравнить огибающие.
 2. Посчитать спектр АМ (окно Hann) и найти несущую и две боковые.
 3. Проверить формулу КПД: измерить мощности по спектру.
 4. Сгенерировать ЧМ для $\beta = 1$ и $\beta = 5$; сравнить число боковых.
 5. Сверить амплитуды боковых с `scipy.special.jv`.
 6. Построить созвездия BPSK/QPSK/16-QAM с Грей-кодированием.
 7. Пропустить символы через RC-фильтр и посмотреть на «глаз».
 8. Смодулировать, получить I/Q, демодулировать и сравнить с исходным.
 9. Добавить шум и измерить BER для BPSK/QPSK при разных ОСШ.
 10. Собрать OFDM из 16 поднесущих через IFFT и увидеть спектр.
 11. Смоделировать backscatter RFID и оценить фазу/дальность.
 12. Запустить тот же сигнал в GNU Radio (по возможности) и сравнить.
- Инструмент: `numpy`, `scipy`, `matplotlib`; при желании — SDR-железо.

43. Методические заметки для преподавателя

- **Начинать с «боли»:** без модуляции антенна не работает — показать числа.
 - **Демонстрировать «до/после»:** сообщение → модуляция → спектр → демодуляция.
 - **Давать руками:** пусть студент меняет m , β , α и смотрит эффект.
 - **Типичные ошибки студентов:**
 - путают комплексную огибающую и сам сигнал;
 - считают, что у ЧМ узкий спектр;
 - не видят разницы между фазой и частотой;
 - забывают про формирующий фильтр;
 - путают символьную скорость и частоту отсчётов.
 - **Как проверять понимание:**
 - объяснить, откуда две боковые АМ;
 - выбрать модуляцию под задачу и обосновать;
 - прочесть созвездие и оценить помехоустойчивость;
 - объяснить, зачем OFDM и при чём тут БПФ.
 - **Связь с практикой:** каждый приём привязать к проекту (RFID, Wi-Fi, SDR).
 - **Оценивание:** ноутбук с графиками + краткий вывод с обоснованием выбора модуляции и параметров.
-

44. Главная мысль

- Радио без модуляции невозможно: сигнал надо «поднять» на несущую.
 - Комплексная огибающая и I/Q — универсальный язык, на котором говорит вся современная радиоаппаратура.
 - Аналоговые АМ/ЧМ — база; цифровые PSK/QAM — современность; OFDM — то, что работает вокруг нас.
 - За любым «магическим» Wi-Fi стоит комбинация: модуляция + БПФ + кодирование + синхронизация.
 - Понимание этой лекции открывает дорогу к фильтрам (лекции 6–8) и к статистической обработке (лекции 9–10), а в проекте — к RFID, Wi-Fi и SDR.
-

45. Энергетика радиолинии (link budget)

- Чтобы связь работала, нужно, чтобы **принятая мощность** превышала шум.
- Простейшая модель — формула Фрииса:
 - $P_{rx} = P_{tx} \cdot G_{tx} \cdot G_{rx} \cdot (\lambda / (4\pi d))^2$.
- В децибелах удобнее складывать «плюсы» и «минусы»:
 - $P_{rx}(\text{дБ}) = P_{tx} + G_{tx} + G_{rx} - L$, где L — потери.
- Потери свободного пространства: $L_{fs} = 20 \cdot \log_{10}(4\pi d / \lambda)$.
- Плюс потери в кабелях, KCB, препятствия, запас на замирания.
- Итог: **энергетический бюджет** определяет дальность и качество.
- Пример порядка: удвоение дальности → +6 дБ потерь.
- Уровень шума зависит от полосы: $N = k \cdot T \cdot B$ (шире полоса — больше шум).

- Отсюда прямое следствие: **широкая полоса требует больше мощности.**
-

46. Распространение радиоволн (что портит сигнал)

- **Свободное пространство** — идеальный случай (потери только геометрические).
 - **Затухание** в среде (дождь, листва, стены) — сильнее на высоких частотах.
 - **Многолучёвость**: сигнал приходит по нескольким путям с разными задержками.
 - приводит к межсимвольной интерференции;
 - борется эквалайзером и OFDM (циклический префикс).
 - **Замирания** (fading): случайные провалы уровня.
 - отсюда кодирование, разнесение, адаптивная модуляция.
 - **Доплеровский сдвиг**: движение меняет частоту приёма.
 - $\Delta f_D = (v/\lambda) \cdot \cos \theta$; важен для мобильной связи.
 - Выводы для модуляции:
 - в плохом канале — устойчивая схема (BPSK/QPSK);
 - в хорошем — быстрая (64-QAM);
 - OFDM удобен против многолучёвости.
-

47. Что читать и смотреть дальше

- Классика: Оппенгейм/Шафер (сигналы и системы), Проakis (цифровая связь).
- По радио: Скляр (цифровая связь), учебники по OFDM и MIMO.
- Практика: pySDR (онлайн), документация GNU Radio.
- Книги по RFID: Finkenzeller, «RFID Handbook».
- В курсе: следующие лекции (свёртка/фильтры/статистика) и сквозной проект.
- Полезно: уметь читать спектрограмму реального Wi-Fi/LTE сигнала.