

Лекция 2. Гармонический анализ сигналов — подробный разбор

Подробный конспект второй лекции: из чего «собран» сигнал, как выглядит его спектр и как из спектра извлекать числа (параметры сигнала). Материал рассчитан и на подготовку преподавателя, и на самостоятельное чтение.

О чём этот текст и как им пользоваться

- Это **подробный конспект** лекции 2 — переход от «что такое сигнал» к «из чего он состоит».
 - Лекция отвечает на вопросы:
 - почему любое колебание раскладывается на синусоиды;
 - как выглядит спектр периодического и непериодического сигнала;
 - чем отличаются амплитудный и фазовый спектры;
 - как выглядят спектры радиосигналов и цифровой модуляции;
 - как по отсчётам восстановить амплитуду, частоту и фазу.
 - Формат — списки: удобно готовиться и объяснять.
 - Числовые примеры согласованы с ноутбуком `lecture02.ipynb`.
-

Цели лекции (что должен уметь студент)

1. Понять **синусоиду** как «кирпич» любого сигнала:
 - три параметра: амплитуда, частота, фаза;
 - почему именно синусоида удобна как базис.
2. Освоить **ряд Фурье**:
 - гармоники, коэффициенты;
 - примеры: меандр, треугольник, пила;
 - явление **Гиббса**.
3. Понять **непрерывный спектр**:
 - ряд переходит в интеграл;
 - импульс $\leftrightarrow \text{sinc}$;
 - принцип неопределённости «время — частота».
4. Различать **амплитудный и фазовый** спектр:
 - что показывает каждый;
 - чётность/нечётность для вещественного сигнала.
5. Освоить **свойства** преобразования Фурье:
 - линейность, сдвиг, масштаб, свёртка, Парсеваль.
6. Увидеть **спектры радиосигналов** (АМ, ЧМ, ФМ) и **цифровой модуляции** (BPSK/QPSK/QAM, I/Q).
7. Научиться **восстанавливать параметры** сигнала по отсчётам (МНК, БПФ).

Зачем каждый пункт на практике:

- Синусоида — базовый «атом» спектра.
- Ряд Фурье — язык описания периодических процессов.
- Непрерывный спектр — язык непериодических (одиночных) событий.
- Фаза — задержки, дальность, синхронизация.
- Свойства — инструменты расчёта и понимания.

- Модуляция — связь и радио вокруг нас.
 - Восстановление параметров — минимальная задача ЦОС.
-

1. Синусоида — «кирпич» сигнала

1.1 Параметры синусоиды

- **Амплитуда** A — «громкость» колебания.
- **Частота** f — «высота тона» (сколько периодов в секунду, Гц).
- **Фаза** φ — сдвиг во времени относительно начала отсчёта.
- Запись: $x(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)$.
- Период $T = 1/f$; круговая частота $\omega = 2\pi f$.

1.2 Почему именно синусоида

- Возникает естественно в колебательных системах (маятник, контур, струна).
- Является **собственной функцией** линейных систем: проходит через них, меняя только амплитуду и фазу, но не форму.
- Ортогональный базис: разные частоты «не мешают» друг другу при разложении.
- Математически удобна (производные, интегралы снова синусоиды).

1.3 Сумма синусоид

- Сумма синусоид с **кратными** частотами даёт **периодический** сигнал.
- Чем больше компонент, тем сложнее форма.
- Любой «достаточно хороший» сигнал раскладывается в такую сумму.
- Это и есть содержание гармонического анализа.

1.4 Ортогональность (словами)

- Разные гармоники «независимы»: интеграл их произведения за период равен нулю.
 - Поэтому вклад каждой гармоники можно измерить отдельно.
 - Это делает разложение однозначным и вычислительно простым.
-

2. Ряд Фурье

2.1 Идея

- Периодический сигнал = сумма синусоид с частотами $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$
- f_0 — основная частота; $2f_0, 3f_0, \dots$ — **гармоники**.
- Коэффициенты показывают вклад каждой гармоники (амплитуду и фазу).
- Смысл: «сложную кривую» заменяем «списком гармоник».

2.2 Гармоники

- Номер гармоники — во сколько раз её частота больше основной.
- Чётные/нечётные гармоники зависят от симметрии сигнала.

- Скорость убывания амплитуд определяет «гладкость» сигнала.

2.3 Пример: меандр

- Содержит только **нечётные** гармоники.
- Амплитуды падают как $1/k$ (медленно).
- Чем больше гармоник, тем ближе сумма к прямоугольнику.
- «Ступеньки» у фронтов — следствие обрезания ряда.

2.4 Треугольник и пила

- Треугольник: только нечётные, амплитуды падают как $1/k^2$ (быстрее меандра).
- Пила: содержит все гармоники, амплитуды $\approx 1/k$.
- Вывод: чем «мягче» сигнал, тем быстрее спадают гармоники.

2.5 Явление Гиббса

- У скачков сумма ряда даёт выбросы (около 9% от высоты скачка).
- Выбросы не исчезают при росте числа гармоник, а «сжимаются» к скачку.
- Это важный пример того, что приближение имеет артефакты.
- Практический вывод: резкие фронты «дорого» описывать рядом Фурье.

2.6 Сходимость

- Ряд сходится к сигналу «в среднем».
 - В точках разрыва — к полусумме слева и справа.
 - Для инженерии важнее энергетическая сходимость, чем поточечная.
-

3. Преобразование Фурье непериодического сигнала

3.1 Переход к интегралу

- Если сигнал не повторяется, ряд переходит в **интеграл Фурье**.
- Спектр становится **непрерывным**.
- Формально: бесконечный период $\rightarrow$ шаг между гармониками стремится к нулю.

3.2 Непрерывный спектр

- Показывает плотность распределения по частотам.
- Одиночный короткий импульс содержит широкий набор частот.
- Длинный сигнал — узкий спектр.
- Это первый намёк на принцип «время — частота».

3.3 Импульс $\rightarrow \text{sinc}$

- Идеальный прямоугольный импульс $\rightarrow$ спектр sinc .
- $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ имеет главный и боковые лепестки.
- Та же функция появится в окнах и интерполяции (лекции 3–4).

- Понимание sinc — ключ к пониманию утечки.

3.4 Гауссов импульс

- Гауссов сигнал «самодвойственен»: его спектр тоже гауссов.
- Наиболее «компактен» сразу и во времени, и по частоте.
- Поэтому гауссиана — образец для сглаживающих окон.

3.5 Принцип неопределённости «время — частота»

- Нельзя одновременно иметь сколь угодно узкий импульс и узкий спектр.
 - Произведение длительностей ограничено снизу.
 - Это фундаментальное свойство, а не недоработка метода.
 - Позже вернётся в спектрограмме и вейвлетах.
-

4. Амплитудный и фазовый спектр

4.1 Что показывает каждый

- **Амплитудный** $|X(f)|$ — сколько «каждой частоты».
- **Фазовый** $\arg X(f)$ — с каким сдвигом каждая частота присутствует.

4.2 Чётность и нечётность

- Для вещественного сигнала:
 - амплитуда — чётная функция;
 - фаза — нечётная.
- Достаточно знать половину спектра.
- Отрицательные частоты — «зеркало» положительных.

4.3 Зачем нужна фаза

- Измерение задержек и дальности.
 - Фазовая локализация (RFID, радар).
 - Синхронизация и когерентное накопление.
 - Без фазы нельзя восстановить сигнал из спектра.
-

5. Свойства преобразования Фурье

5.1 Линейность

- Сумма сигналов → сумма спектров.
- Позволяет раскладывать задачу на части.

5.2 Сдвиг во времени

- Задержка сигнала меняет только **фазу**, модуль спектра не меняется.
- Это основа измерения задержек по фазовому наклону.

5.3 Сдвиг по частоте (модуляция)

- Умножение на синусоиду переносит спектр на её частоту.
- Это и есть **модуляция**, основа радиосвязи.

5.4 Масштаб (подобие)

- Сжатие сигнала расширяет спектр и наоборот.
- Короткий импульс → широкая полоса.

5.5 Свёртка

- Свёртка во времени $\leftrightarrow$ умножение в спектре.
- Умножение во времени $\leftrightarrow$ свёртка в спектре.
- Ключ к фильтрации и к пониманию утечки.

5.6 Дифференцирование и интегрирование

- Дифференцирование подчёркивает высокие частоты.
- Интегрирование — низкие.
- Полезно при анализе гладкости и шума.

5.7 Парсеваль

- Энергия во времени равна энергии в спектре.
- Проверка корректности вычислений.

5.8 Сводная таблица свойств

Во времени	В спектре
Сумма	Сумма
Задержка	Линейная фаза
Умножение на синус	Сдвиг спектра
Сжатие	Расширение
Свёртка	Умножение
Умножение	Свёртка
Производная	Умножение на $j\omega$
Энергия	Энергия (Парсеваль)

6. Спектры модулированных сигналов

6.1 Амплитудная модуляция (АМ)

- Несущая f_c плюс две **боковые** $f_c \pm f_m$.
- Глубина модуляции влияет на амплитуды.
- Полоса — удвоенная максимальная частота сообщения.

6.2 Балансная и с подавленной несущей

- При балансной модуляции несущую подавляют.
- Остаются только две боковые.
- Экономия мощности, но сложнее демодуляция.

6.3 Частотная и фазовая модуляция (ЧМ/ФМ)

- Спектр шире: множество боковых компонент.
- Расстояние между ними равно частоте модуляции.
- Индекс модуляции определяет «богатство» спектра.
- Помехоустойчивее АМ, но занимает больше полосы.

6.4 Словами про функцию Бесселя

- Амплитуды боковых при ЧМ описываются функциями Бесселя.
- Не нужно считать вручную — важно понимать: спектр «расходится» тем шире, чем сильнее модуляция.
- Число заметных боковых $\approx$ удвоенный индекс модуляции плюс один.

6.5 Сравнение АМ и ЧМ

Свойство	АМ	ЧМ
Полоса	узкая	шире
Помехоустойчивость	ниже	выше
Постоянство амплитуды	нет	да
Сложность приёмника	проще	сложнее

7. Цифровая модуляция (затравка к лекции 5)

7.1 BPSK и QPSK

- **BPSK** — два состояния фазы ($0, \pi$).
- **QPSK** — четыре состояния (по 2 бита на символ).
- Чем больше состояний, тем выше скорость, но ниже помехоустойчивость.

7.2 QAM

- Комбинирует амплитуду и фазу.
- 16-QAM, 64-QAM и выше — стандарт скоростных каналов.
- Требует хорошего отношения сигнал/шум.

7.3 Созвездие

- Каждому символу — точка на комплексной плоскости.
- Расстояние между точками определяет помехоустойчивость.
- Приёмник «угадывает» ближайшую точку.

7.4 I/Q

- **I** — синфазная составляющая, **Q** — квадратурная.
- Вместе описывают амплитуду и фазу одним комплексным числом.
- Удобно для цифровой обработки и SDR.

7.5 Спектр цифрового сигнала

- Занимает полосу вокруг несущей.
 - Форма зависит от фильтра-формирователя (spectral shaping).
 - Подробно — лекция 5.
-

8. Спектр реального сигнала: вибрация

- Пример: вибрация агрегата.
 - База 50 Гц (вращение) и дефект 120 Гц.
 - Во времени — «шумная кривая»; в спектре — чёткие линии.
 - Так спектр превращает сигнал в **числа для решения**.
 - Это мостик к КСППР: спектр → признаки → вывод.
-

9. Утечка и окна (мостик к лекции 4)

- Конечная запись «размазывает» линии — **утечка**.
 - Причина: умножение на прямоугольное окно = свёртка спектра со sinc.
 - Лечение — плавные **окна**.
 - Компромисс: меньше утечки — шире главный лепесток.
 - Подробно разбирается на лекции 4.
-

10. Восстановление параметров по дискретным отсчётам

10.1 Постановка задачи

- Даны отсчёты сигнала с шумом.

- Нужно найти A , f , φ (минимальная задача ЦОС).
- По сути — обратная задача: из данных к модели.

10.2 Через sinc-интерполяцию

- Теоретически точно восстанавливает непрерывный сигнал.
- На практике неудобно (бесконечная сумма, чувствительность к краям).
- Полезно как эталон.

10.3 Метод наименьших квадратов (МНК)

- Строим модель $A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi)$ и минимизируем ошибку.
- При известной частоте задача линейна (по $\cos/\sin$ компонентам).
- При неизвестной — нелинейная (перебор/оптимизация).
- Даёт хорошую точность при правильной модели шума.

10.4 Через БПФ

- Находим максимум спектра и уточняем частоту.
- Просто и быстро.
- Точность ограничена сеткой; улучшается интерполяцией (лекция 4).

10.5 Точность и метод Монте-Карло

- Повторяем оценку при разном шуме.
- Смотрим разброс ошибок.
- Строим зависимость от ОСШ и длины записи.
- Готовый шаблон для проектных задач.

10.6 Сравнение методов

Метод	Плюсы	Минусы
sinc	теоретически точно	неудобно, чувствительно
МНК	высокая точность	сложнее, нужна модель
БПФ	просто и быстро	точность ограничена сеткой

11. Спектр → признаки → КСППР

- Спектр — промежуточное представление, не самоцель.
- Признаки из спектра:
 - частоты пиков;
 - отношения амплитуд (гармоники);
 - энергия по полосам;
 - ширина и форма линий.
- Признаки → классификация/прогноз → **рекомендация ЛПР**.
- Так работает входной тракт КСППР.

12. Практические рецепты

- **Вибрация:** смотреть гармоники оборотной частоты и боковые полосы дефектов.
 - **Электрика:** следить за 50 Гц и её гармониками.
 - **Аудио:** анализировать спектрограмму, а не только средний спектр.
 - **Радио:** помнить, что сигнал — это спектр вокруг несущей.
 - **Общее правило:** сначала понять физику частот, потом интерпретировать пики.
-

13. Шпаргалка (словарь)

Термин	Что означает
Синусоида	базовое колебание: A , f , φ
Гармоника	частота, кратная основной
Ряд Фурье	разложение периодического сигнала
Интеграл Фурье	разложение непериодического сигнала
Амплитудный спектр	сколько каждой частоты
Фазовый спектр	с каким сдвигом
sinc	$\sin(x)/x$, спектр импульса
Гиббс	выбросы у скачков
АМ/ЧМ/ФМ	амплитудная/частотная/фазовая модуляция
Созвездие	точки символов на комплексной плоскости
I/Q	синфазная и квадратурная компоненты
МНК	метод наименьших квадратов
Парсеваль	равенство энергий

14. Частые ошибки и заблуждения

- «Спектр — это только амплитуды».
 - Фаза тоже важна (задержки, восстановление).
 - «Отрицательные частоты — ошибка».
 - Следствие вещественности сигнала; они симметричны.
 - «Утечка — баг».
 - Следствие конечной записи.
 - «Гармоники всегда до бесконечности значимы».
 - Амплитуды быстро падают; важна энергия.
 - «Фаза не нужна».
 - Без неё нельзя восстановить сигнал.
 - «Чем больше гармоник в модели, тем лучше».
 - Риск переобучения и шума.
-

15. Вопросы и развёрнутые ответы

1. **Почему синусоида — «кирпич» сигнала?** Это собственная функция линейных систем и ортогональный базис, в котором любой сигнал раскладывается однозначно.
 2. **Какие гармоники у меандра?** Только нечётные, амплитуды падают как $1/k$.
 3. **В чём суть явления Гиббса?** У скачков сумма ряда даёт неустранимые выбросы; они сжимаются к разрыву.
 4. **Почему короткий импульс даёт широкий спектр?** Принцип неопределённости «время — частота»: чем короче во времени, тем шире по частоте.
 5. **Чем отличаются спектры АМ и ЧМ?** АМ — несущая и две боковые; ЧМ — множество боковых, шире полоса.
 6. **Что такое созвездие и I/Q?** Точки символов на комплексной плоскости; I/Q — синфазная и квадратурная составляющие.
 7. **Как восстановить A , f , φ ?** Через sinc-интерполяцию, МНК или поиск пика БПФ с уточнением.
 8. **Чем МНК отличается от БПФ-метода?** МНК точнее, но сложнее; БПФ проще и быстрее, точность ограничена сеткой.
 9. **Что такое утечка?** Размазывание линий из-за конечной записи (умножения на окно).
 10. **Как спектр связан с признаками для КСППР?** Из пиков и полос строят признаки, по которым оценивают состояние и дают рекомендацию.
-

16. План рассказа на 2 академических часа

1. **10 мин.** Синусоида как «кирпич»; параметры; ортогональность.
 2. **20 мин.** Ряд Фурье: гармоники, меандр, треугольник, Гиббс.
 3. **15 мин.** Непериодический сигнал: интеграл, непрерывный спектр, sinc.
 4. **15 мин.** Амплитудный и фазовый спектр; свойства (таблица).
 5. **20 мин.** Спектры АМ/ЧМ/ФМ; цифровая модуляция, созвездия, I/Q.
 6. **15 мин.** Восстановление параметров: sinc, МНК, БПФ, точность.
 7. **10 мин.** Вибрация, признаки, мостик к Л3–Л4 и проекту.
- **Приём:** каждое свойство сразу иллюстрировать картинкой.
 - Давать «до/после»: модуляция → сдвиг спектра, задержка → наклон фазы.
-

17. Итог

- Любой сигнал — сумма синусоид.
 - Ряд Фурье — для периодических; интеграл — для непериодических.
 - Спектр бывает амплитудным и фазовым; фаза критична.
 - Радио- и цифровые сигналы — важные примеры.
 - По спектру восстанавливаются параметры — это минимальная задача ЦОС.
-

18. Что дальше

- **Лекция 3:** ДПФ — как компьютер считает спектр.

- **Лекция 4:** БПФ, окна, разрешение, усреднение.
- **Лекция 5:** модуляция и I/Q подробно.