

Лекция 2. Гармонический анализ сигналов

Курс: Обработка сигналов · 4 курс · 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Направленность: искусственный интеллект и системная аналитика **Длительность:** 2 ак. ч лекции + 4 ак. ч практики

На первой лекции мы ввели два портрета сигнала — **во времени и по частоте** — и назвали спектр «рентгеном» сигнала. Но откуда берётся спектр, почему у него такие пики и что они означают, осталось за кадром. Сегодня мы вскрываем этот «чёрный ящик»: показываем, что **любой сигнал можно собрать из синусоид**, а спектр — это список деталей с указанием, сколько какой синусоиды в него входит. Математики по-прежнему минимум: опираемся на интуицию и картинки, а все графики строятся тут же на Python.

К концу лекции вы сможете: объяснить роль синусоиды как «кирпича» сигнала; собрать периодический сигнал из ряда Фурье; читать амплитудный и фазовый спектр и понимать, что теряется без фазы; сформулировать свойства преобразования Фурье, включая **перенос спектра**; узнавать спектры амплитудной и частотной модуляции; понимать, почему у реального спектра пики «расплываются»; и решить **минимальную задачу цифровой обработки сигналов** — восстановить параметры сигнала по его дискретным отсчётам.

1. Синусоида — «кирпич» любого сигнала

Простейшее колебание — **синусоида**. У неё всего три параметра:

- **амплитуда A** — «насколько высоко»;
- **частота f** (или период $T = 1/f$) — «как часто»;
- **фаза φ** — «с какого места» начинается колебание.

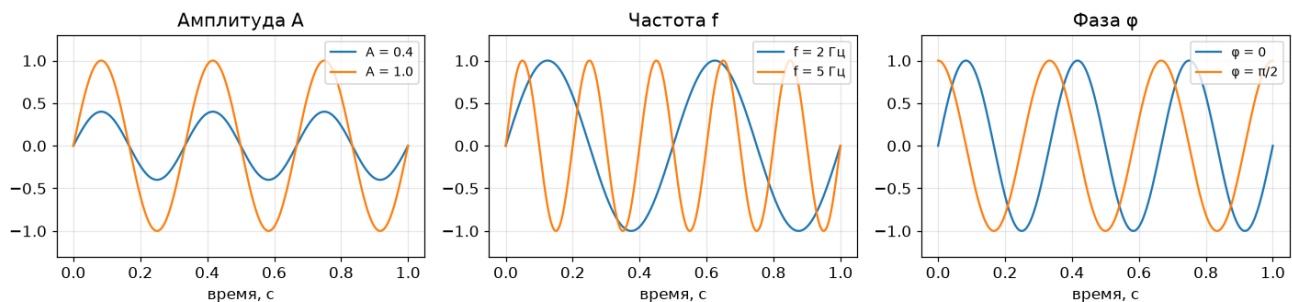


Figure 1: Три параметра синусоиды

Вся дальнейшая логика лекции — в одной фразе: **сложный сигнал = сумма синусоид разной амплитуды, частоты и фазы**. Спектр показывает, сколько каждого «кирпичика» взято. Это и есть содержание гармонического анализа.

2. Ряд Фурье: сигнал как сумма гармоник

Идея Фурье. Любой периодический сигнал раскладывается в сумму синусоид, частоты которых кратны основной: f_0 , $2 \cdot f_0$, $3 \cdot f_0$, ... Такие составляющие называют **гармониками**. Чем больше гармоник возьмём, тем точнее приблизим форму сигнала.

Проверим на **меандре** — прямоугольном сигнале. Складывая нечётные гармоники с амплитудами, убывающими как $1/k$, получаем всё более «прямоугольную» кривую.

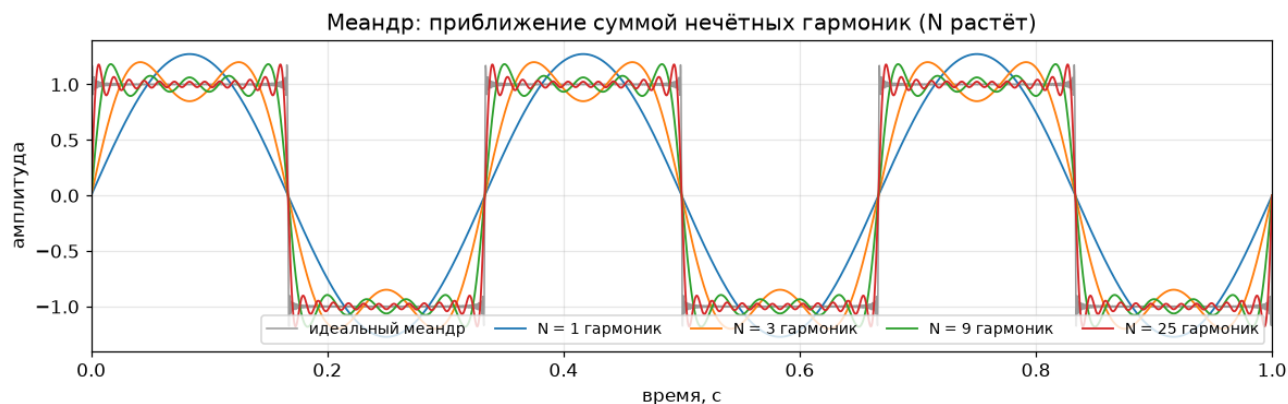


Figure 2: Меандр из N гармоник

Явление Гиббса. Около разрыва сумма всегда «звенит»: появляется выброс высотой около 9 % от высоты ступени. Добавляя гармоники, мы делаем выброс всё уже, но не устраним его. Вывод практический: сигналы с разрывами «дорого» описывать гармониками — понадобится много составляющих. Если посмотреть на амплитуды гармоник, видим характерную картину: только нечётные частоты, и чем выше номер, тем меньше амплитуда.



Figure 3: Спектр меандра

3. Непериодический сигнал: непрерывный спектр

Если сигнал не повторяется — например, это одиночный импульс, — сумма превращается в **интеграл Фурье**, а отдельные линии — в **непрерывную кривую**. Для прямоугольного импульса эта кривая есть функция $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$: центральный лепесток и затухающие боковые.

Отсюда важное наблюдение (одно из свойств Фурье): **чем короче сигнал во времени, тем шире его спектр**. Короткий импульс требует широкой полосы; длинный низкочастотный процесс укладывается в узкую полосу.

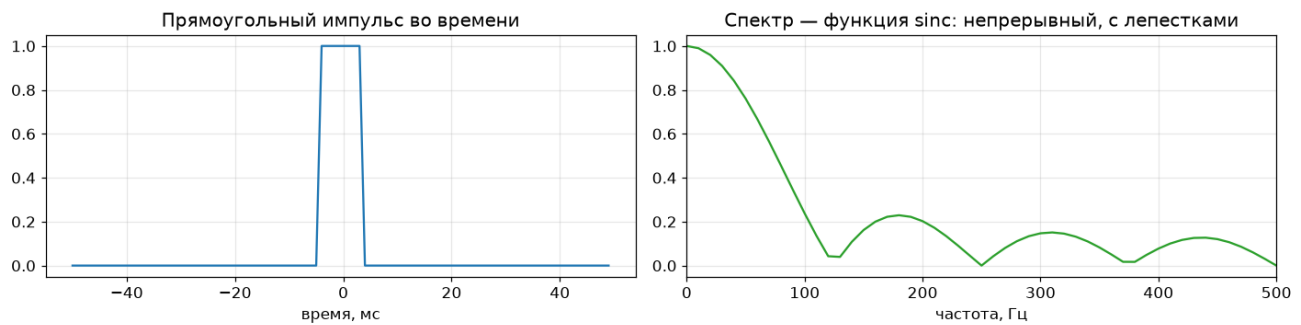


Figure 4: Прямоугольный импульс и его спектр

4. Амплитудный и фазовый спектр

Полный спектр — **комплексный**: у каждой частоты есть амплитуда и фаза. Мы обычно смотрим только на амплитуды, но именно **фаза** отвечает за форму сигнала и его положение во времени. Два сигнала с одинаковыми амплитудными спектрами, но разными фазами выглядят совершенно по-разному.

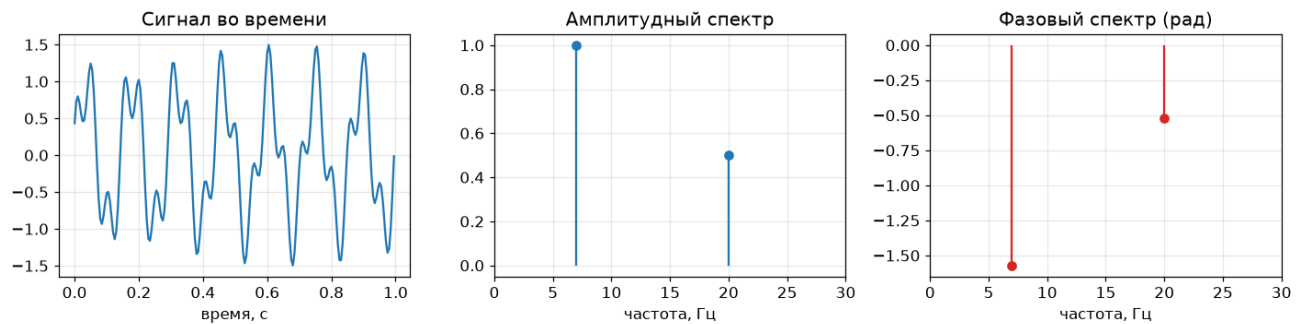


Figure 5: Амплитудный и фазовый спектр

Для многих задач фаза критична. Например, в RFID именно фаза отражённого сигнала несёт информацию о расстоянии до метки. Поэтому «выкинуть фазу» можно не всегда.

5. Свойства преобразования Фурье

Полезно запомнить несколько свойств — без доказательств:

- **Линейность**: спектр суммы равен сумме спектров.
- **Сдвиг во времени ↔ фаза**: при сдвиге сигнала амплитуды не меняются, а фазы получают линейный набег.
- **Подобие (масштаб)**: короткий сигнал — широкий спектр и наоборот.
- **Умножение на несущую = перенос спектра** — это, по сути, и есть модуляция.

6. Спектры радиосигналов: АМ и ЧМ

Амплитудная модуляция (АМ). Умножаем сообщение на несущую — спектр сообщения «переезжает» на частоту несущей и даёт **две боковые полосы** $f_0 \pm F$. В эфире это выглядит как центральная несущая и два её симметричных «спутника».

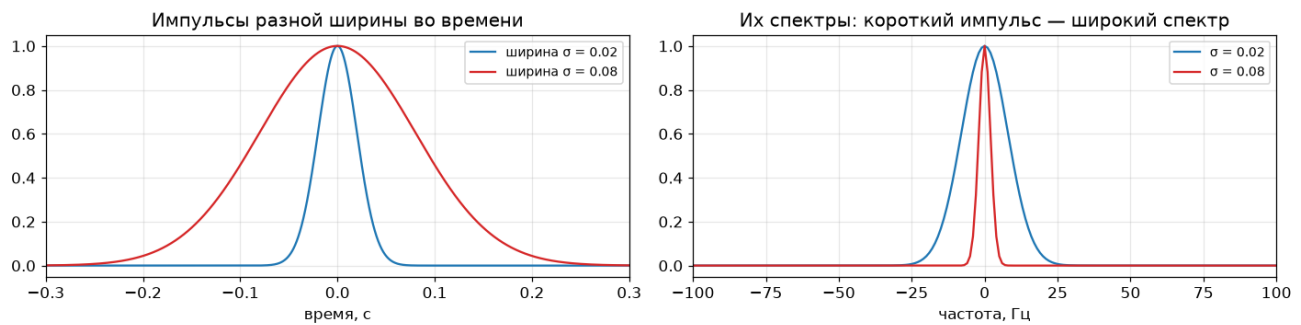


Figure 6: Импульс и ширина спектра

Частотная модуляция (ЧМ). Меняем частоту несущей. Спектр — уже не две линии, а **расходящийся набор** боковых составляющих: чем больше **девиация**, тем шире полоса. Похоже ведёт себя **фазовая модуляция (ФМ)**: фаза и частота связаны, и их спектры похожи.

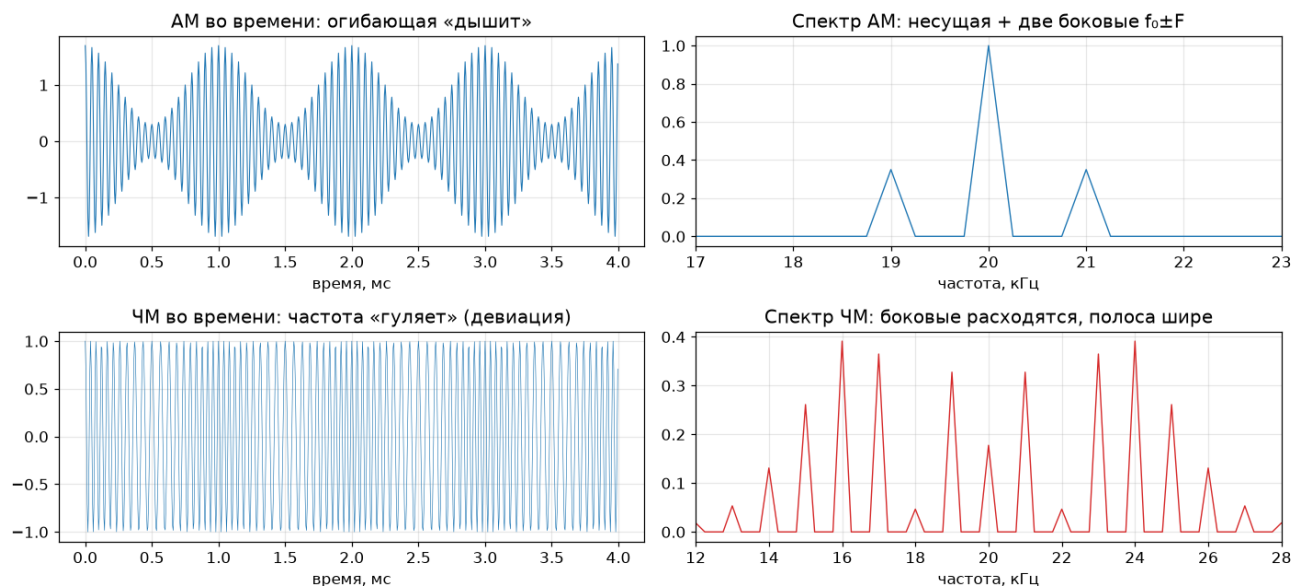


Figure 7: Спектры АМ и ЧМ

Эти примеры — прямой мостик к лекции 5, где мы разберём модуляцию подробно, введём комплексную огибающую (I/Q) и научимся считать полосу по девиации.

7. Цифровая модуляция — затравка

В цифровой связи сигнал удобно изображать **точкой на плоскости I/Q**: положение точки задаёт амплитуду и фазу символа. BPSK — две точки, QPSK — четыре, 16-QAM — решётка 4×4. Спектр такого сигнала занимает определённую полосу, что и определяет скорость передачи.

8. Спектры реальных сигналов

Тот же аппарат работает на настоящих данных. Возьмём сигнал вибрации из кейса «диагностика насосного агрегата»: базовая частота вращения, признак дефекта подшипника и шум. Во

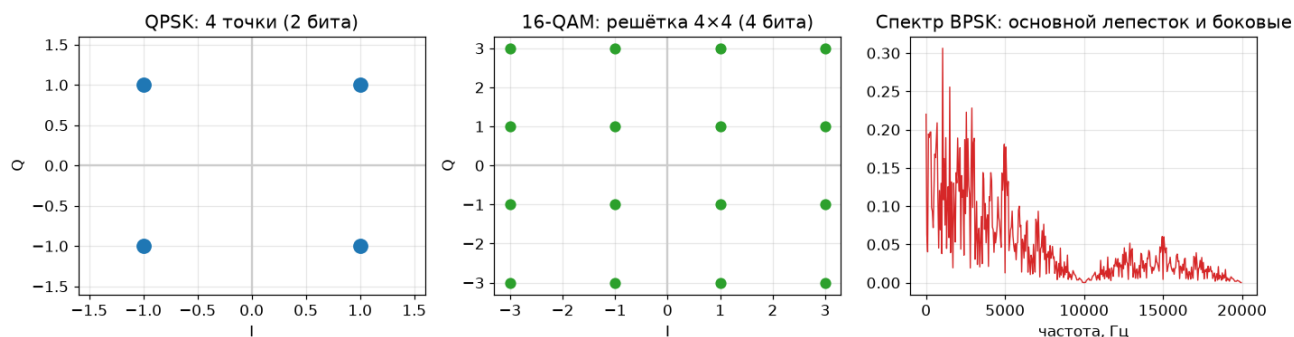


Figure 8: Созвездия и спектр цифровой модуляции

временной картинке дефект почти не виден, а в спектре — это отчётливая линия, по которой и принимается решение.

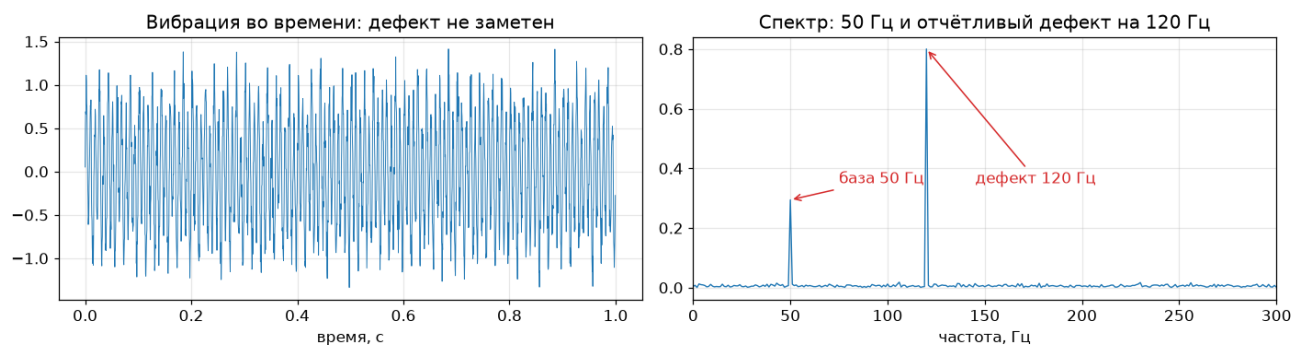


Figure 9: Спектр сигнала вибрации

Так спектр превращает «непонятную кривую» в понятный набор чисел: частоты, их амплитуды, ширину полосы.

9. Усечение сигнала: почему пики «расплываются»

На практике мы всегда берём **конечный** кусок сигнала. Это равносильно умножению на **прямоугольное окно**, и спектр «размазывается» — возникает **утечка**. Если частота не попадает точно в отсчёт спектра, вместо одной линии получаем «холмик».

Утечка спектра: сигнал 10.5 Гц не попадает в отсчёт частоты

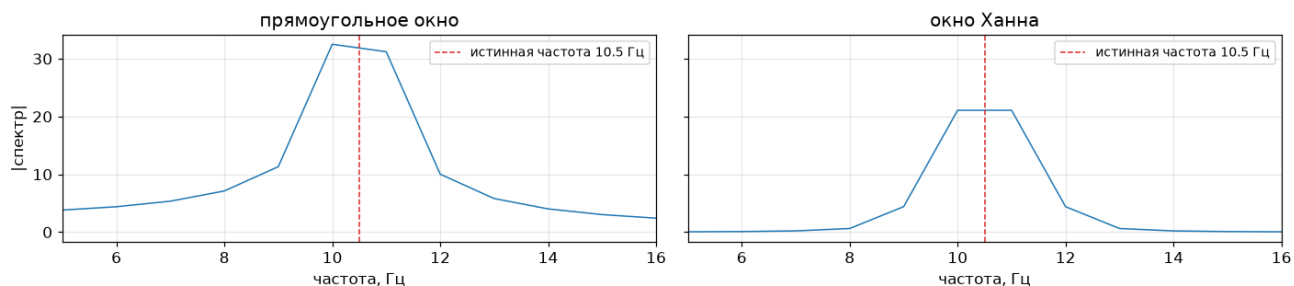


Figure 10: Утечка и окно Ханна

Сглаживающие **окна** (например, Ханна) уменьшают утечку. Подробно разберём это на лекции 4, посвящённой практическому спектральному анализу.

10. От спектра к решению: признаки для КСППР

Спектр сам по себе — ещё не решение. Чтобы он стал полезен в системе поддержки принятия решений, из него извлекают **признаки**: доминирующие частоты, гармоники, ширину полосы, энергию в полосах. Эти числа описывают **состояние** объекта и подсказывают **рекомендацию** человеку, который принимает окончательное решение.

Спектр — источник признаков для КСППР

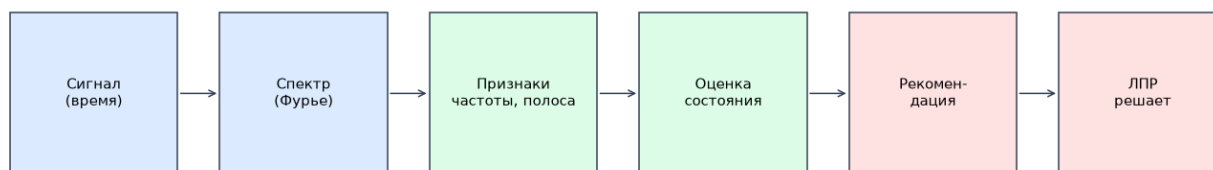


Figure 11: Спектр как источник признаков

Именно так сигнал встраивается в контур **КСППР** (Human-in-the-Loop): от сырых данных — через спектр и признаки — к состоянию, рекомендации и решению.

11. Восстановление параметров сигнала по дискретным отсчётам

Минимальная задача цифровой обработки сигналов. Пусть есть только N дискретных отсчётов $x[n]$ аналогового сигнала. Можно ли по ним восстановить сигнал и описать его несколькими числами? Да: если сигнал — одна синусоида, достаточно найти три её параметра — **амплитуду A , частоту f и фазу φ** — и сигнал известен в любой момент времени. На этой задаче видна вся цепочка обработки: *дискретизация* → *оценка параметров* → *восстановление*.

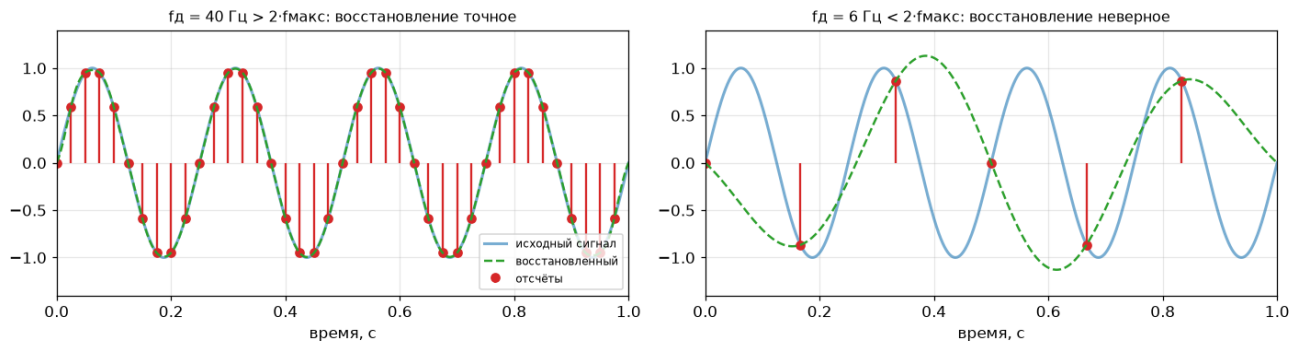
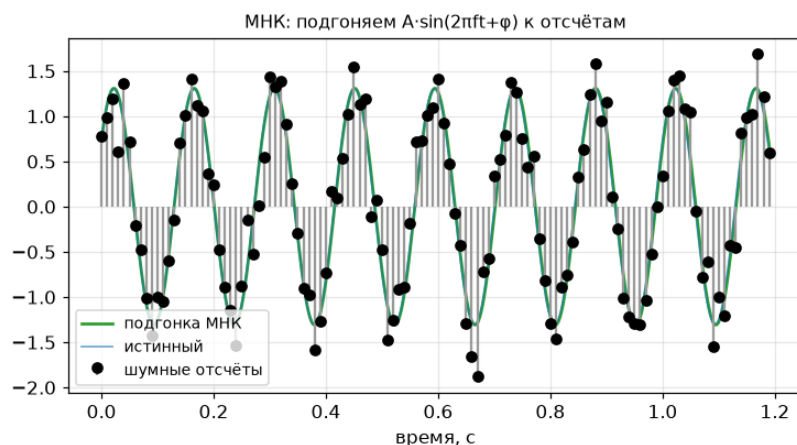


Figure 12: Дискретизация и восстановление формы

Теорема Котельникова требует $f_d \geq 2 \cdot f_{\text{макс}}$; при нарушении условия восстановленная кривая уходит на ложную (алиасную) частоту.

Метод наименьших квадратов. Подгоняем модель $A \cdot \sin(2\pi f t + \varphi)$ ко всем отсчётам. Оценки почти совпадают с истиной; минус — нужна модель и стартовое приближение.



Оценки параметров		
параметр	истина	оценка
A	1.30	1.31
f, Гц	7.00	6.992
φ, рад	0.60	0.590

Figure 13: МНК-подгонка параметров

Спектральный метод. Пик спектра даёт частоту, параболическая интерполяция уточняет её между бинами, а амплитуда и фаза берутся из проекции сигнала на $\sin$ и $\cos$ найденной частоты. Метод быстрый, но чувствителен к утечке.

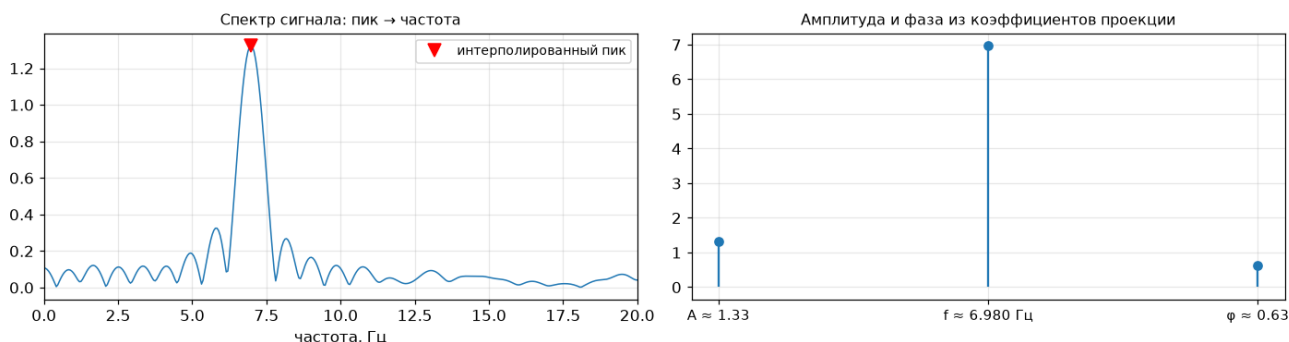


Figure 14: Спектральный метод

Точность. С ростом ОСШ ошибка падает: МНК выходит на теоретический предел точности, а БПФ-интерполяция упирается в систематическую ошибку.

Это «тест-драйв» тракта АЦП и прямой мост к проекту: частота вибрации, фаза RFID, задержка GPS. Дальнейшие темы — обобщения этой задачи: много частот (ДПФ/БПФ), шум и оценивание, изменяющиеся параметры (фильтр Калмана).

Задание №2 (для своего проекта)

1. Найти **спектр** сигнала своего проекта: амплитудный и фазовый.
2. Выделить **три доминирующие частоты** и дать им физическую интерпретацию.
3. Оценить **ширину полосы** сигнала.
4. Если в канале есть несущая — определить её частоту и боковые полосы.
5. Проверить, что выбранная частота дискретизации не даёт **утечки**, или применить окно.

Сдавать: ноутбук с графиками + **один** слайд-вывод, к следующей лекции.

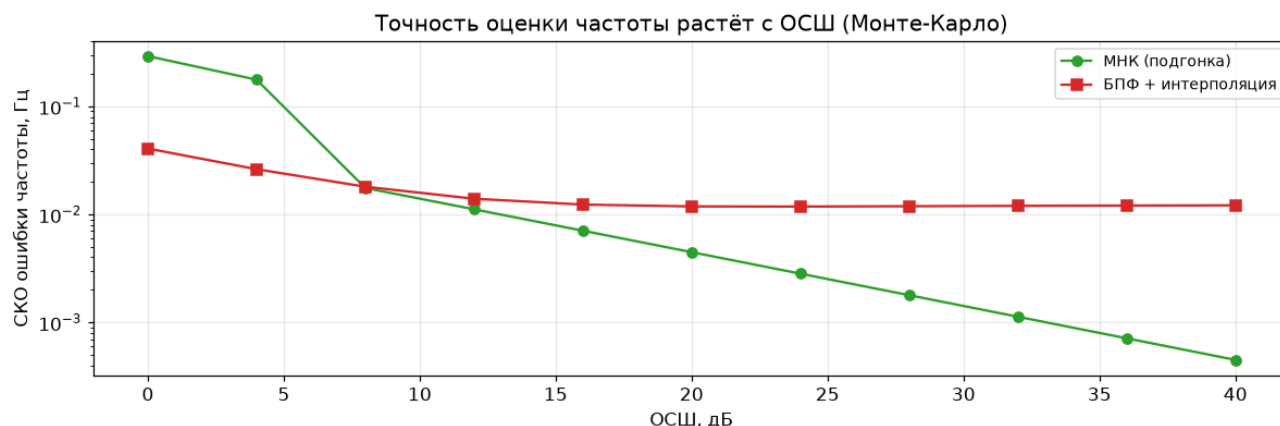


Figure 15: Точность оценки частоты

Итоги

- Любой сигнал собирается из **синусоид**; спектр — «список деталей».
- **Ряд Фурье** даёт гармоники; у меандра — только нечётные, с амплитудой $1/k$.
- Полный спектр **комплексный**: амплитуда **и** фаза; без фазы форма теряется.
- **Короткий импульс** $\leftrightarrow$ **широкий спектр**; свойства Фурье — рабочий инструмент.
- **Модуляция** есть перенос спектра: АМ даёт две боковые, ЧМ — расходящиеся.
- Конечный кусок сигнала даёт **утечку**; спасают окна (лекция 4).
- Спектр — источник **признаков** для КСППР.
- **Минимальная задача ЦОС**: по дискретным отсчётам восстанавливаются параметры сигнала (A , f , φ) — методом **МНК** (точно) или **БПФ** (быстро).

Дальше: дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — как посчитать спектр точно и быстро, затем БПФ и окна.

Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов*. — М.: Техносфера, 2012.
2. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов*. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
3. Солонина А. И. и др. *Основы цифровой обработки сигналов*. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
4. Умняшкин С. В. *Основы теории цифровой обработки сигналов*.
5. Материалы курса и RAG-ассистент по этим книгам — в папке курса.