

# Обработка сигналов

Восстановление параметров сигнала по дискретным отсчётам

Прикладная математика и информатика

4 курс · 01.03.02 · ИИ и системная аналитика

# Минимальная задача цифровой обработки сигналов

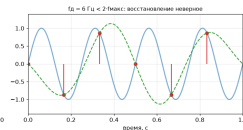
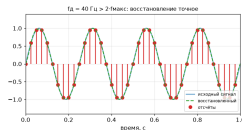
- **Дано:**  $N$  отсчётов  $x[n] = x(n/f_d)$  неизвестного сигнала.
- **Найти:** параметры  $A, f, \varphi$  модели  $x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$ .
- **Зачем:** восстановить сигнал в любой момент времени и описать его числами.
- Почему «**минимальная**»: всего **3 неизвестных**, но на ней видна вся цепочка обработки — дискретизация  $\rightarrow$  оценка  $\rightarrow$  восстановление.
- Всё остальное в курсе — **обобщение** этой задачи на много частот, шум, модели и фильтры.

## Идея

Сигнал из дискретных отсчётов можно полностью описать **несколькими числами**.

# Сколько отсчётов нужно?

- Теорема Котельникова:  $f_d \geq 2f_{\max}$  — форма восстанавливается точно.
- Для одной синусоиды формально достаточно **3 точек**, но при шуме нужен **запас** (избыточность).
- При  $f_d < 2f_{\max}$  — **алиасинг**: восстановленная кривая уходит на неверную частоту.



# Восстановление формы: sinc-интерполяция

- Отсчёты «взвешивают» сдвинутые функции sinc:

$$x(t) = \sum_n x[n] \operatorname{sinc}(f_d t - n), \quad \operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}.$$

- При  $f_d \geq 2f_{\max}$  сумма **точно** проходит через все отсчёты и восстанавливает сигнал между ними.
- При нарушении условия сумма тоже строится, но даёт **ложную** (алиасную) частоту — ошибку уже не исправить.

## Практический вывод

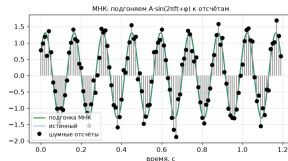
Частота дискретизации выбирается **заранее** из ширины спектра сигнала.

# Метод 1: наименьшие квадраты (подгонка модели)

- Задаём модель  $x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$ .
- Минимизируем невязку по отсчётам:

$$\min_{A, f, \varphi} \sum_n (x[n] - A \sin(2\pi f t_n + \varphi))^2.$$

- Три параметра восстанавливаются **очень точно**.
- Минус: нужна **модель** и начальное приближение; поиск дороже.



Оценки параметров

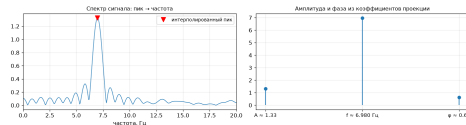
| параметр        | истина | оценка |
|-----------------|--------|--------|
| A               | 1.30   | 1.31   |
| f, Гц           | 7.00   | 6.992  |
| $\varphi$ , рад | 0.60   | 0.590  |

# Метод 2: спектральный (БПФ)

- Считаем спектр и берём **пик** — это частота  $f$ .
- Параболическая **интерполяция** соседних отсчётов уточняет  $f$  между бинами.
- Амплитуда и фаза — **проекция** сигнала на  $\sin$  и  $\cos$  этой частоты:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{atan2}(b, a).$$

- Плюс: **быстро** и без модели; минус: смещение из-за утечки.



# Какова точность оценки?

- Ошибка **падает** с ростом ОСШ (качества данных) и числа отсчётов.
- **МНК** выходит на теоретический предел точности — эффективная оценка.
- **БПФ + интерполяция** быстрее, но упирается в систематическую ошибку.
- Выбор метода — компромисс **точность** / **скорость**.



# Зачем это в курсе

- Это «**тест-драйв**» **тракта АЦП**: проверка разрядности, частоты дискретизации и калибровка.
- Прямой **мост к проекту**: частота вибрации, фаза сигнала RFID, тон и задержка GPS.
- Дальнейшие темы — **обобщения**:
  - много частот сразу — **ДПФ/БПФ** (лекции 3–4);
  - шум и случайные сигналы — **оценивание** (лекция 11);
  - изменяющиеся во времени параметры — **фильтр Калмана** (лекция 12).

## Сквозная мысль

От **трёх чисел** для синусоиды — к полноценной системе поддержки принятия решений.

- Минимальная задача ЦОС: по дискретным отсчётам оценить  $A, f, \varphi$ .
- Восстановление формы — **sinc-интерполяция**; условие —  $f_d \geq 2f_{\max}$ .
- Два пути оценки: **МНК** (точно) и **БПФ** (быстро).
- Точность растёт с ОСШ; методы имеют разный предел.
- Это вход во все остальные темы курса и в сквозной проект.