

Обработка сигналов

Лекция 3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Прикладная математика и информатика

4 курс · 01.03.02 · ИИ и системная аналитика

Маршрут блока «Сигналы и спектры»

- **Лекция 1–2:** сигнал, спектр как идея (непрерывный Фурье).
- **Лекция 3 (сегодня):** как посчитать спектр — ДПФ.
- **Лекция 4:** БПФ и практический спектральный анализ (окна, разрешение).
- **Лекция 5:** спектры радио и модуляция, комплексная огибающая (I/Q).
- Сегодня даём **две стороны:** инженерную и математическую.

Цели лекции 3

- 1 Записать **прямое и обратное ДПФ** и объяснить их смысл.
- 2 Связать ДПФ с непрерывным спектром: $f_k = kf_d/N$.
- 3 Сформулировать **свойства** ДПФ.
- 4 Записать ДПФ в **матричной форме** $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$.
- 5 Считать ДПФ на Python и строить ось частот.
- 6 Понять $O(N^2)$ и мотив к **БПФ**.

Зачем нужно ещё одно преобразование

- Непрерывный спектр (лекция 2) — это **интеграл**; компьютер его не берёт:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \longrightarrow \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n/N}.$$

- На практике есть только N **отсчётов** $x[0], \dots, x[N-1]$: вместо интеграла — **сумма**.
- **ДПФ** — линейное преобразование N чисел в N чисел (спектр точно в N точках).
- Всё остальное (БПФ, окна, спектрограммы) — надстройки над ДПФ.

Математическое представление: ДПФ и ОДПФ

Обозначим $W_N = e^{-j2\pi/N}$. Здесь $j = \sqrt{-1}$ — **инженерное обозначение мнимой единицы**: в электротехнике буква i занята током, поэтому мнимую единицу пишут j .

Прямое ДПФ (сигнал $\rightarrow$ спектр):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

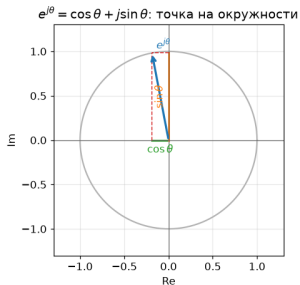
Обратное ДПФ (спектр $\rightarrow$ сигнал):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}.$$

Смысл: разложение по N комплексным экспонентам — **ортогональному базису**; $X[k]$ — сколько в сигнале частоты $f_k = kf_d/N$.

Что такое $e^{-j\theta}$: единичная окружность

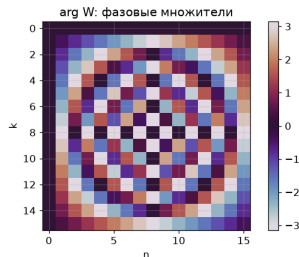
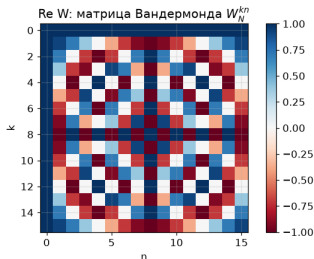
- $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ (формула Эйлера) — это **само комплексное число**.
- На комплексной плоскости: $\text{Re} = \cos \theta$, $\text{Im} = \sin \theta$ — точка единичной окружности.
- Умножение на $e^{-j\theta}$ — **поворот по часовой** на θ .
- $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$ — N равномерных точек: **базис ДПФ**.
- $X[k]$ — проекция сигнала на эту «стрелку» (корреляция).



Матричная форма

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x}, \quad W_{kn} = W_N^{kn}, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}.$$

- $\mathbf{W}$ — симметричная матрица Вандермонда из W_N .
- $\mathbf{W}^H$ — сопряжённое транспонирование.
- Обратное ДПФ — то же по структуре, но с $+j$ и множителем $1/N$.



Связь с непрерывным спектром

$$f_k = k \frac{f_d}{N}, \quad \Delta f = \frac{f_d}{N} = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{N}{f_d}.$$

- ДПФ даёт **отсчёты** непрерывного спектра на частотах f_k .
- Дискретизация во времени $\Rightarrow$ **периодичность** спектра (период f_d).
- Конечное число отсчётов $\Rightarrow$ **дискретизация** по частоте (шаг Δf).
- Связь амплитуд: $X[k] \approx X_{\text{непр}}(f_k) \cdot f_d$.

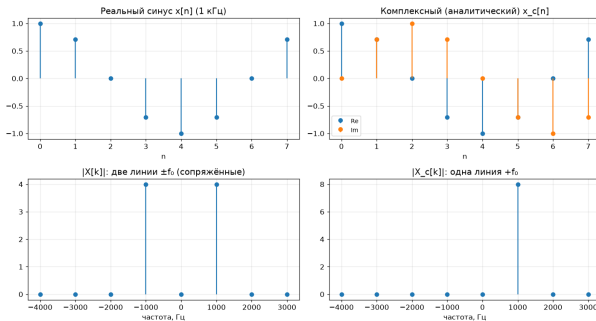
Два мира — две симметрии

Дискретность во времени $\leftrightarrow$ периодичность по частоте; периодичность во времени $\leftrightarrow$ дискретность по частоте.

Комплексное представление синуса (1 кГц)

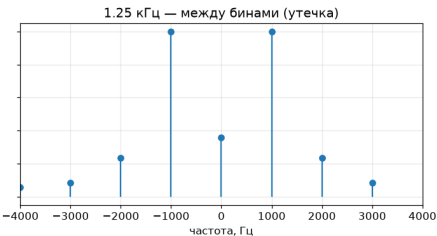
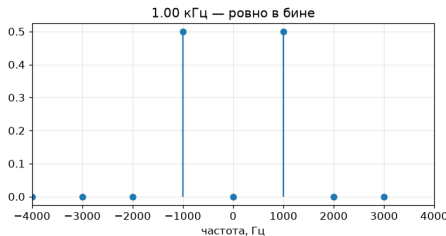
По формуле Эйлера $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$:

- реальный синус $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \rightarrow$ **две** сопряжённые линии $\pm f_0$ (амплитуды $A/2$, фазы $\pm\varphi$);
- комплексный (аналитический) $Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \rightarrow$ **одна** линия $+f_0$;
- восстановление: $A = 2|X[k]|/N$, $\varphi = \arg X[k]$; пример $f_0 = 1$ кГц, $f_d = 8000$, $N = 8$, $k = 1$.



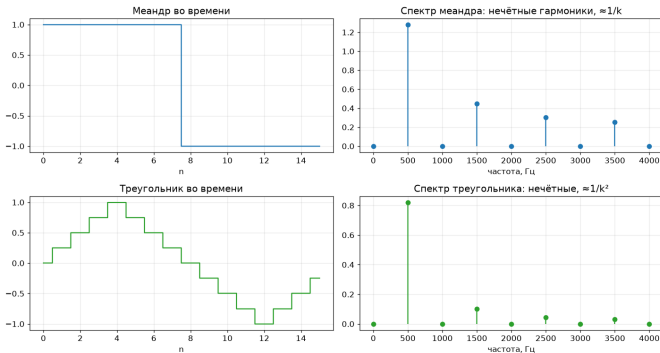
Ровно в бине или между бинами

- Частота совпала с бином $\rightarrow$ две чёткие линии.
- Частота между бинами $\rightarrow$ энергия растекается (утечка).
- Пример: $f_d = 8000$, $N = 8$, $\Delta f = 1000$ Гц; 1.00 кГц против 1.25 кГц.



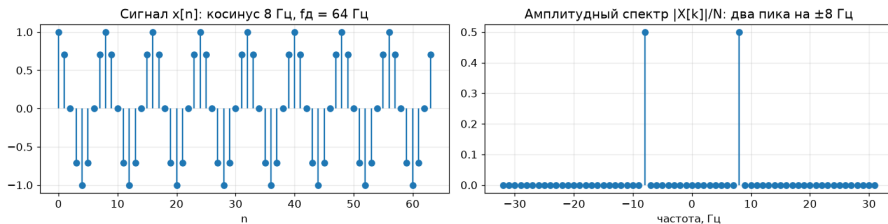
Примеры: меандр и треугольник

- Оба периодические, содержат только **нечётные** гармоники.
- Меандр: амплитуды $\approx 1/k$ (затухают медленно).
- Треугольник: амплитуды $\approx 1/k^2$ (затухают быстро, спектр «мягче»).
- Мостик к ряду Фурье и явлению Гиббса (лекция 2).



Что означает ДПФ (инженерно)

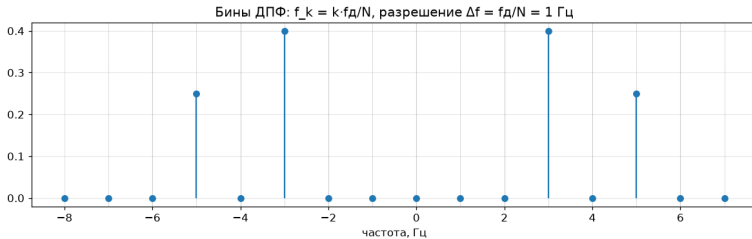
- $X[k]$ — **комплексная амплитуда** частоты $f_k = kf_d/N$.
- $|X[k]|$ — амплитуда, $\arg X[k]$ — фаза.
- Ось частот: `fftfreq` (двусторонняя), `rfftfreq` (односторонняя).
- Нормировка: $|X|/N$ или $2|X|/N$.



Бины и разрешение по частоте

- ДПФ знает сигнал только на частотах $f_k = kf_d/N$.
- Шаг сетки — **разрешение** $\Delta f = f_d/N$.
- Длительность записи $T = N/f_d \Rightarrow \Delta f = 1/T$.
- Чтобы различить близкие частоты, нужна **длинная запись**.

$$f_k = k \frac{f_d}{N}, \quad \Delta f = \frac{f_d}{N} = \frac{1}{T}.$$

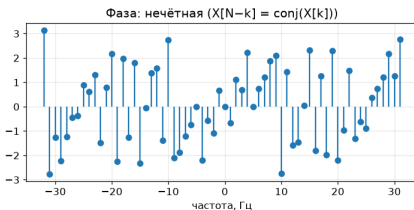
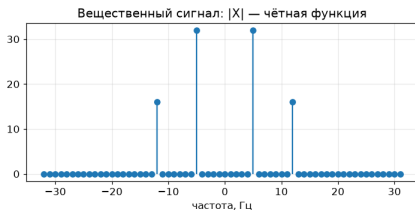


Свойства ДПФ

- **Линейность:** $\text{ДПФ}(ax + by) = a \text{ДПФ}(x) + b \text{ДПФ}(y)$.
- **Симметрия** при вещественном $x[n]$: $X[N - k] = \overline{X[k]}$.
- **Сдвиг** $\leftrightarrow$ фаза: $x[n - n_0] \rightarrow X[k] e^{-j2\pi kn_0/N}$.
- **Круговая свёртка:** $\text{ДПФ}(x \circledast y) = \text{ДПФ}(x) \cdot \text{ДПФ}(y)$.
- **Парсеваль:** $\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_k |X[k]|^2$.

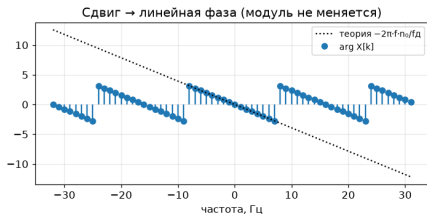
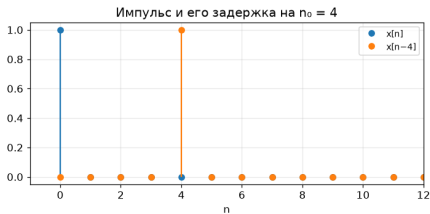
Симметрия вещественного спектра

- Для вещественного $x[n]$: $X[N - k] = \overline{X[k]}$.
- Модуль — **чётная** функция частоты.
- Фаза — **нечётная**.
- Значит, достаточно половины спектра (rfft).



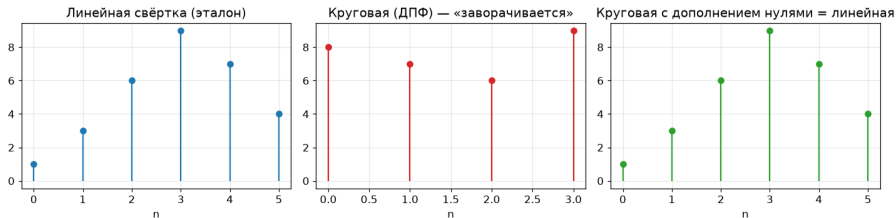
Сдвиг во времени $\rightarrow$ линейная фаза

- Задержка на n_0 не меняет $|X[k]|$.
- К фазе добавляется линейный член $-2\pi k n_0 / N$.
- По наклону фазы можно измерять **задержку** (эхо, дальность).



Круговая свёртка

- ДПФ превращает свёртку в **умножение**.
- Но свёртка **круговая**: «хвост» заворачивается.
- Дополняем нулями до $N \geq N_a + N_b - 1$ — получаем **линейную**.



Круговая свёртка: заворачивание конца

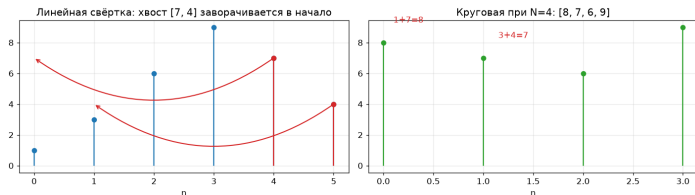
Индексы берутся по модулю N :

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[(n - m) \bmod N].$$

Хвост линейной свёртки (индексы $\geq N$) **заворачивается** в начало:

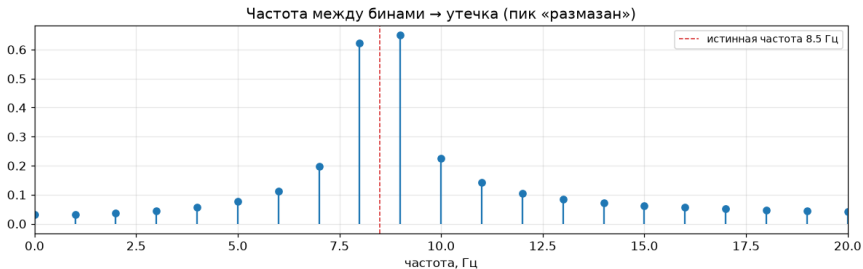
$$y_{\text{circ}}[n] = y_{\text{lin}}[n] + y_{\text{lin}}[n + N] + \dots$$

Пример $[1, 2, 3, 4] \circledast [1, 1, 1]$, $N = 4$: $[1, 3, 6, 9, 7, 4] \rightarrow [8, 7, 6, 9]$.



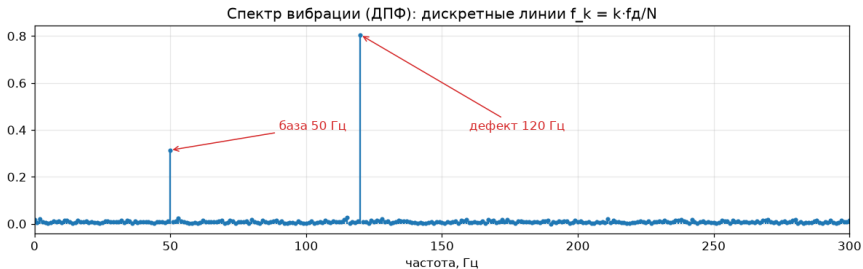
Утечка: частота между бинами

- Если частота $\neq$ узлу сетки, энергия **растекается**.
- Пик превращается в «холмик».
- Лечится **окнами** (лекция 4).



ДПФ реального сигнала

- Вибрация: база 50 Гц, дефект 120 Гц, шум.
- Считаем ДПФ и переводим бины в герцы.
- Дефект — отчётливая линия в спектре.



Ось частот и нормировка (на практике)

- $X = \text{np.fft.fft}(x)$ — полный (двусторонний) спектр, N точек.
- $\text{np.fft.rfft}(x)$ — половина для вещественного сигнала.
- $f = \text{np.fft.fftfreq}(N, 1/\text{fs})$, fftshift — ось и центр.
- Амплитуда: двусторонняя $|X|/N$, односторонняя $2|X|/N$.

Типичная ошибка

Забыть про нормировку и центрирование — пик «уезжает» и амплитуда завышается вдвое.

Что такое БПФ

- **БПФ** (быстрое преобразование Фурье, FFT) — **не новое преобразование**, а быстрый **алгоритм** для того же самого ДПФ.
- Идея «разделяй и властвуй» (Cooley–Tukey): разбить N отсчётов на **чётные** и **нечётные** и свести к двум ДПФ половинной длины.
- «Бабочка» radix-2 объединяет результаты:

$$X[k] = E[k] + W_N^k O[k], \quad X[k + N/2] = E[k] - W_N^k O[k].$$

- Для $N = 2^m$ рекурсия даёт $\log_2 N$ уровней по N операций: $O(N \log_2 N)$ вместо $O(N^2)$.
- Результат — **точно тот же**, меняется только число операций.

Вычислительная сложность и мотив к БПФ

- Прямое ДПФ: умножение матрицы $N \times N$ на вектор — $O(N^2)$.
- **БПФ** (алгоритм, не новое преобразование): $O(N \log_2 N)$.
- Для $N = 10^6$: 10^{12} против $\approx 2 \cdot 10^7$ операций — выигрыш в десятки тысяч раз.
- Поэтому считают **БПФ**; ДПФ — его математическая основа.

Дальше (лекция 4)

Алгоритм БПФ, окна, разрешение и усреднение (метод Уэлча).

Задание №3 (для своего проекта)

- 1 Посчитать **ДПФ** сигнала своего проекта.
- 2 Построить **ось частот** (rfftfreq), отметить $\Delta f = f_d/N$.
- 3 Проверить **симметрию** для вещественного сигнала.
- 4 Показать **утечку** при числе отсчётов, не кратном периоду.
- 5 Сравнить с непрерывной теорией, где она известна.

Сдавать: ноутбук с графиками + **один** слайд-вывод.

Итоги лекции 3

- **ДПФ** переводит N отсчётов в N коэффициентов.
- Частоты дискретны: $f_k = kf_d/N$, $\Delta f = f_d/N = 1/T$.
- Свойства: линейность, симметрия, сдвиг $\leftrightarrow$ фаза, круговая свёртка, Парсеваль.
- Матричная форма $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$; обратное — $\mathbf{W}^H/N$.
- $O(N^2) \Rightarrow$ переход к **БПФ** (лекция 4).

Приложение: вывод формулы Эйлера через ряды

Разложение экспоненты в ряд Тейлора при $x = j\theta$:

$$e^{j\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\theta)^n}{n!} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} - \dots$$

Степени j идут циклом $1, j, -1, -j$, поэтому члены делятся на две группы:

$$\underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots}_{\cos \theta} + j \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)}_{\sin \theta}$$

Отсюда:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta.$$

- 1 Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов.*
- 2 Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов.*
- 3 Солонина А. И. и др. *Основы цифровой обработки сигналов.*
- 4 Умняшкин С. В. *Основы теории цифровой обработки сигналов.*

Дальше

Лекция 4: БПФ и практический спектральный анализ.