

Лекция 3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — подробный разбор

Подробный конспект третьей лекции: как компьютер считает спектр, что означает каждое число на выходе и какие свойства ДПФ превращаются в инструменты. Материал рассчитан и на подготовку преподавателя, и на самостоятельное чтение.

О чём этот текст и как им пользоваться

- Это **подробный конспект** лекции 3 — от идеи спектра к конкретному алгоритму.
 - Лекция отвечает на вопросы:
 - зачем переходить от интеграла к сумме;
 - как записать ДПФ (прямое, обратное, матричное);
 - как связаны частоты, разрешение и длительность;
 - какие у ДПФ свойства и как ими пользоваться.
 - Формат — списки: удобно готовиться и объяснять.
 - Числовые примеры согласованы с ноутбуком `lecture03.ipynb`.
-

Цели лекции (что должен уметь студент)

1. Понять, зачем нужно **ДПФ**:
 - интеграл заменяется суммой;
 - из N чисел получаем N чисел спектра.
2. Записать **прямое и обратное** ДПФ.
3. Записать ДПФ в **матричной форме** ($X = W \cdot x$).
4. Связать ДПФ с **непрерывным спектром** и разрешением:
 - $f_k = k \cdot f_d / N$;
 - $\Delta f = 1/T$.
5. Освоить **свойства** ДПФ (линейность, симметрия, сдвиг, свёртка, Парсеваль).
6. Понять **бины, утечку и круговую свёртку**.
7. Понять ограничение $O(N^2)$ и мотив к **БПФ**.

Зачем каждый пункт на практике:

- ДПФ — базовый «рабочий» спектр.
 - Матричная форма — язык линейной алгебры и понимания свойств.
 - Разрешение — что реально можно различить.
 - Свойства — инструменты (сдвиг, фильтрация).
 - Круговая свёртка — почему нельзя просто перемножить спектры.
 - $O(N^2)$ — зачем нужно БПФ.
-

1. Зачем нужно ДПФ

1.1 Проблема непрерывного спектра

- Непрерывный спектр — это **интеграл**.
- Компьютер не берёт бесконечный интеграл.

- На практике есть только N отсчётов: $x[0], \dots, x[N-1]$.

1.2 Идея ДПФ

- **ДПФ** — линейное преобразование: из N чисел делает N чисел.
- Интеграл заменяется **суммой** по отсчётам.
- Всё дальнейшее (БПФ, окна, спектрограммы) — надстройки над ДПФ.
- ДПФ — «точный спектр» для данной конечной записи.

1.3 Что ДПФ даёт

- Амплитуды и фазы на **сетке частот**.
 - Числа, пригодные для обработки и решений.
 - Основа для признаков: пики, отношения, энергия по полосам.
-

2. Математическое представление

2.1 Обозначения

- Индексы $n = 0 \dots N-1$ (время), $k = 0 \dots N-1$ (частота).
- $W_N = e^{(-j \cdot 2\pi/N)}$ — поворотный множитель.
- $j = \sqrt{-1}$ — инженерное обозначение (буква i занята током).

2.2 Прямое ДПФ

- $X[k] = \sum_n x[n] \cdot W_N^{(k \cdot n)} = \sum_n x[n] \cdot e^{(-j \cdot 2\pi \cdot k \cdot n/N)}$.
- Смысл: корреляция сигнала с синусоидой частоты k .
- Совпало — большое число; не совпало — почти ноль.

2.3 Обратное ДПФ

- $x[n] = (1/N) \cdot \sum_k X[k] \cdot e^{(+j \cdot 2\pi \cdot k \cdot n/N)}$.
- Знак экспоненты другой и есть множитель $1/N$.
- Обратное восстанавливает сигнал из спектра без потерь (в рамках модели).

2.4 Матричная форма

- $X = W \cdot x$, где $W_{(k,n)} = W_N^{(k \cdot n)}$ — матрица Вандермонда.
 - Обратное: $x = (1/N) \cdot W^H \cdot X$ (W^H — сопряжённое транспонирование).
 - Матрица симметричная; строки — разные частоты.
 - Удобно для анализа свойств (ортогональность, обратимость).
-

3. Геометрия: что такое $e^{(-j\theta)}$

- Формула Эйлера: $e^{(j\theta)} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$.
- Это точка на **единичной окружности** под углом θ .

- Умножение на $e^{(-j\theta)}$ — поворот по часовой стрелке.
 - W_N^k — N равномерно расставленных «стрелок» на окружности.
 - $X[k]$ — проекция сигнала на такую «стрелку» (корреляция).
 - Проекция = совпадение: совпало — пик, не совпало — ноль.
-

4. Связь с непрерывным спектром

4.1 Сетка частот

- ДПФ даёт **отсчёты** непрерывного спектра на частотах $f_k = k \cdot f_{\text{д}}/N$.
- Разрешение: $\Delta f = f_{\text{д}}/N = 1/T$.
- Длительность записи: $T = N/f_{\text{д}}$.
- Число уникальных бинов: N (комплексный сигнал), $N/2 + 1$ (вещественный).

4.2 Двойственность время–частота

- Дискретность во времени → **периодичность** спектра (период $f_{\text{д}}$).
- Конечная длина записи → **дискретность** по частоте (шаг Δf).
- Периодичность во времени → дискретность по частоте.
- Это «зеркало», которое помогает запомнить связи.

4.3 Нормировка амплитуд

- Связь амплитуд: $X[k] \approx X_{\text{непр}}(f_k) \cdot f_{\text{д}}$.
 - На практике: $|X|/N$ или $2|X|/N$ (для одностороннего спектра).
-

5. Комплексное представление синуса

- По Эйлеру: $\cos\theta = (e^{(j\theta)} + e^{(-j\theta)})/2$.
 - Реальный синус $A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ → **две** сопряжённые линии $\pm f_0$ (амплитуды $A/2$, фазы $\pm\varphi$).
 - Комплексный (аналитический) сигнал → **одна** линия $+f_0$.
 - Восстановление: $A = 2 \cdot |X[k]|/N$, $\varphi = \arg X[k]$.
 - Для вещественного сигнала достаточно половины спектра (`rfft`).
-

6. Бины и примеры

6.1 Бины

- ДПФ «знает» сигнал только на частотах $f_k = k \cdot f_{\text{д}}/N$.
- Шаг сетки — **разрешение** Δf .
- Между бинами спектр не определён «напрямую».

6.2 On-bin и off-bin

- Частота совпала с бином $\rightarrow$ две чёткие линии.
- Частота между бинами $\rightarrow$ энергия растекается (**утечка**).
- Пример: $f_{\text{д}} = 8000$, $N = 8$, $\Delta f = 1000$; 1.00 кГц против 1.25 кГц.

6.3 Меандр и треугольник

- Оба содержат только **нечётные** гармоники.
- Меандр: амплитуды $\approx 1/k$.
- Треугольник: $\approx 1/k^2$ (спектр «мягче»).
- Мостик к ряду Фурье и явлению Гиббса (лекция 2).

6.4 ДПФ реального сигнала

- Вибрация: база 50 Гц, дефект 120 Гц, шум.
 - Считаю ДПФ, переводим бины в герцы.
 - Дефект — отчётливая линия в спектре.
 - Спектр превращает «непонятную кривую» в числа.
-

7. Свойства ДПФ

7.1 Линейность

- $\text{ДПФ}(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \text{ДПФ}(x) + b \cdot \text{ДПФ}(y)$.
- Основа для разложения задачи на части.

7.2 Симметрия вещественного сигнала

- $X[N-k] = \text{conj}(X[k])$.
- Достаточно половины спектра.

7.3 Сдвиг во времени $\leftrightarrow$ фаза

- $x[n-n_0] \rightarrow X[k] \cdot e^{(-j2\pi k n_0/N)}$.
- Модуль не меняется, фаза линейна.

7.4 Круговая свёртка

- $\text{ДПФ}(x * y) = \text{ДПФ}(x) \cdot \text{ДПФ}(y)$.
- Основа быстрой фильтрации.

7.5 Парсеваль

- $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$.
- Энергия сохраняется.

7.6 Сводная таблица

Свойство	Формула	Применение
Линейность	$a \cdot x + b \cdot y$	суперпозиция
Симметрия	$X[N-k] = \text{conj } X[k]$	половина спектра
Сдвиг	$X[k] \cdot e^{(-j2\pi k n_0/N)}$	задержки
Свёртка	$X \cdot Y$	фильтрация
Парсеваль	$\sum x ^2 = (1/N) \sum X ^2$	проверка

8. Круговая свёртка и «заворачивание»

- ДПФ превращает свёртку в **умножение** — основа быстрой фильтрации.
- Но свёртка получается **круговой**: индексы берутся по модулю N.
- Хвост линейной свёртки (индексы $\geq N$) **складывается с началом**:
 - $y_{\text{circ}}[n] = y_{\text{lin}}[n] + y_{\text{lin}}[n+N] + \dots$
- Пример $[1, 2, 3, 4] * [1, 1, 1]$ при $N = 4$:
 - $y_{\text{lin}} = [1, 3, 6, 9, 7, 4]$;
 - хвост $[7, 4]$ заворачивается $\rightarrow [8, 7, 6, 9]$.
- Чтобы получить линейную свёртку, дополняем нулями до $N \geq N_a + N_b - 1$.
- Иначе линии спектра «накладываются» — типичная ошибка.

9. Ось частот и нормировка

- pr.fft.fft — полный двусторонний спектр (N точек).
- pr.fft.rfft — половина для вещественного сигнала.
- Ось: fft.freq (двусторонняя) и rfft.freq (односторонняя).
- Центрирование: fftshift .
- Амплитуда: $|X|/N$ или $2|X|/N$.
- Типичная ошибка: забыть нормировку/центрирование — пик «уезжает».

10. Мотив к БПФ

- Прямое ДПФ: N^2 операций.
- Для $N = 10^6$ это 10^{12} — неприемлемо.
- Время растёт как квадрат длины записи.
- Нужен быстрый алгоритм — **БПФ** (лекция 4).
- БПФ даёт тот же результат за $N \cdot \log_2 N$.

11. Приложение: вывод формулы Эйлера

- Раскладываем $e^{(j\theta)}$ в ряд Тейлора.

- Степени j идут циклом 1, j , -1 , $-j$.
 - Члены делятся на две группы: ряд косинуса и ряд синуса.
 - Отсюда $e^{j\theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$ — следствие рядов, а не постулат.
 - Это объясняет, почему комплексная экспонента «крутит» фазу.
-

12. Практические рецепты

- Для вещественного сигнала брать `rfft` и `rfftfreq`.
 - Для «центрированного» спектра — `fftshift`.
 - Не забывать нормировку амплитуд.
 - Для фильтрации через ДПФ — дополнять нулями до линейной свёртки.
 - Проверять себя через Парсеваль (энергия).
-

13. Шпаргалка (словарь)

Термин	Что означает
ДПФ	N чисел $\rightarrow N$ чисел спектра
Обратное ДПФ	восстановление сигнала из спектра
W_N	поворотный множитель $e^{-j2\pi/N}$
Матрица Вандермонда	матрица W в $X = W \cdot x$
Бин	узел частотной сетки
Δf	разрешение, $1/T$
Симметрия	$X[N-k] = \text{conj } X[k]$
Круговая свёртка	свёртка по модулю N
Заворачивание	наложение хвоста свёртки
Парсеваль	равенство энергий
<code>rfft</code>	половина спектра вещественного сигнала

14. Частые ошибки и заблуждения

- «ДПФ — приближение».
 - Для данной записи это точный спектр.
 - «Можно взять любой N без последствий».
 - Сетка частот зависит от N и $f_{\text{д}}$.
 - «Перемножу спектры — получу свёртку».
 - Только **круговую**; для линейной нужно дополнение нулями.
 - «Забуду про $1/N$ в обратном ДПФ».
 - Сигнал восстановится с неверным масштабом.
 - «Отрицательные частоты — ошибка».
 - Следствие вещественности; они сопряжены положительным.
 - «Утечка — дефект алгоритма».
 - Следствие конечной записи.
-

15. Вопросы и развёрнутые ответы

1. **Зачем нужен переход от интеграла к сумме?** Компьютер работает с конечным набором отсчётов; сумма — вычисляемая форма спектра.
 2. **Запишите прямое и обратное ДПФ.** $X[k] = \sum x[n] W_N^{-kn}$; $x[n] = (1/N) \sum X[k] W_N^{kn}$.
 3. **Что такое матрица Вандермонда?** Матрица W с элементами W_N^{-kn} , задающая ДПФ как $X = W \cdot x$.
 4. **Как связаны f_k , Δf , T ?** $f_k = k \cdot f_{\text{д}}/N$, $\Delta f = f_{\text{д}}/N = 1/T$.
 5. **В чём симметрия вещественного спектра?** $X[N-k] = \text{conj } X[k]$; хватает половины.
 6. **Что такое круговая свёртка и заворачивание?** Свёртка по модулю N ; хвост линейной свёртки складывается с началом.
 7. **Почему нужна нормировка?** Чтобы амплитуды и энергии соответствовали физическим величинам.
 8. **Как получить линейную свёртку через ДПФ?** Дополнить нулями до $N \geq N_a + N_b - 1$.
 9. **Откуда берётся формула Эйлера?** Из рядов Тейлора для $e^{j\theta}$, $\cos\theta$, $\sin\theta$.
 10. **Почему $O(N^2)$ ведёт к БПФ?** Квадратичное время неприемлемо для больших N ; БПФ ускоряет до $N \cdot \log_2 N$.
-

16. План рассказа на 2 академических часа

1. **10 мин.** Зачем ДПФ; от интеграла к сумме.
 2. **20 мин.** Прямое/обратное ДПФ; матрица Вандермонда.
 3. **15 мин.** Геометрия $e^{-j\theta}$, W_N^k ; корреляция.
 4. **15 мин.** Связь с непрерывным спектром; $\Delta f = 1/T$; двойственность.
 5. **15 мин.** Бины, on/off-bin, меандр/треугольник, вибрация.
 6. **15 мин.** Свойства; круговая свёртка и заворачивание.
 7. **10 мин.** Ось частот, нормировка, мотив к БПФ, задание №3.
- **Приём:** каждую формулу сопровождать картинкой и числом.
 - Давать «руками»: посчитать ДПФ маленького массива и сверить с пипру.
-

17. Итог

- ДПФ — точный спектр из N отсчётов (сумма вместо интеграла).
 - Частоты дискретны; разрешение $\Delta f = 1/T$.
 - Работают свойства: линейность, симметрия, сдвиг, свёртка, Парсеваль.
 - Матричная форма $X = W \cdot x$; обратное — через W^H .
 - Круговая свёртка требует дополнения нулями.
 - $O(N^2)$ — мотив к БПФ.
-

18. Что дальше

- **Лекция 4:** БПФ, окна, разрешение, усреднение — практический спектральный анализ.
- **Лекция 5:** модуляция и I/Q.
- **Лекция 6:** свёртка, корреляция, согласованная фильтрация.