

Лекция 3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Курс: Обработка сигналов · 4 курс · 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Направленность: искусственный интеллект и системная аналитика **Длительность:** 2 ак. ч лекции + 4 ак. ч практики

На лекции 2 мы поняли, что любой сигнал собирается из синусоид, а спектр — «список деталей». Но спектр мы *рисовали*, а не считали: непрерывное преобразование Фурье требует интеграла, а у компьютера есть только **N дискретных отсчётов**. Сегодня строим мост — **дискретное преобразование Фурье (ДПФ)**: точный спектр в конечном числе точек.

Как просили, даём **две стороны** одной темы: **инженерную** (что это значит на практике, как считать) и **математическую** (строгие определения, свойства, матричная форма). Они не заменяют, а дополняют друг друга.

К концу лекции вы сможете: записать прямое и обратное ДПФ и объяснить их смысл; связать ДПФ с непрерывным спектром; сформулировать свойства ДПФ; записать ДПФ в матричной форме; считать его на Python и правильно строить ось частот; понимать ограничение $O(N^2)$, ведущее к БПФ.

1. Зачем нужно ещё одно преобразование

- Непрерывный спектр (лекция 2) — это **интеграл**; компьютер его не берёт.
- На практике мы имеем **N отсчётов** $x[0], \dots, x[N-1]$.
- **ДПФ** — линейное преобразование, которое из N чисел делает N чисел: спектр, посчитанный точно в N точках.
- Всё остальное (БПФ, окна, спектрограммы) — надстройки над ДПФ.

2. Математическое представление

Соглашение: индексы $n = 0 \dots N-1$; обозначим $W_N = e^{-j 2\pi/N}$ (здесь j — **инженерное обозначение** $\sqrt{-1}$: в электротехнике i — это ток).

Прямое ДПФ (сигнал $\rightarrow$ спектр):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Обратное ДПФ (спектр $\rightarrow$ сигнал):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}.$$

Смысл. ДПФ раскладывает вектор x по N комплексным экспонентам — **ортогональному базису**. Коэффициент $X[k]$ показывает, сколько в сигнале составляющей с частотой $f_k = k \cdot f_d/N$.

Матричная форма:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x}, \quad W_{kn} = W_N^{kn}, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}.$$

Матрица $\mathbf{W}$ — симметричная матрица Вандермонда из $\mathbf{W}_N$.

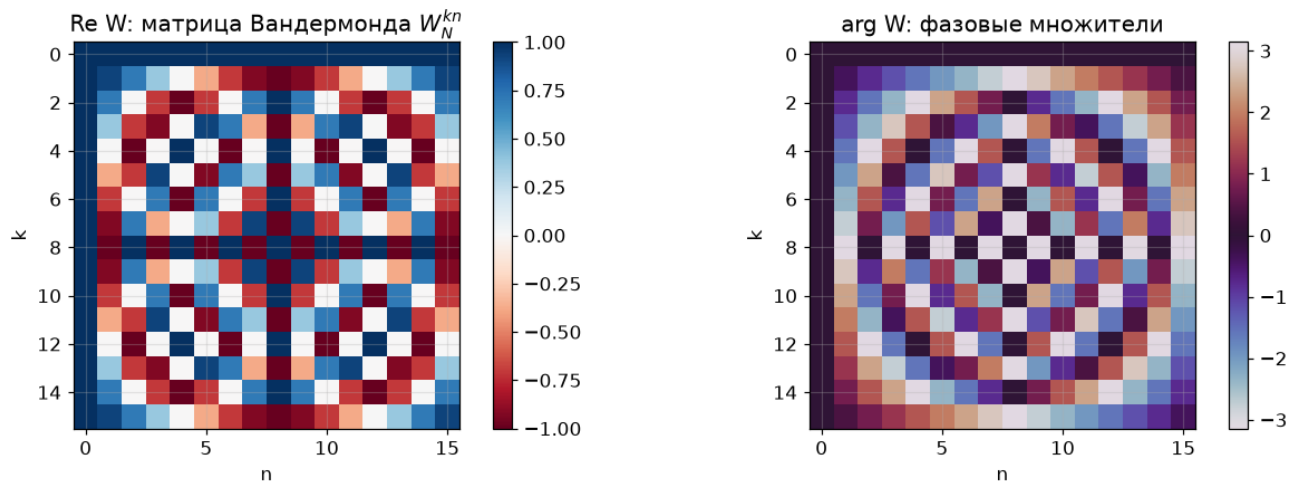


Figure 1: Матрица ДПФ

Что такое $e^{-j\theta}$: единичная окружность

Формула Эйлера: $e^{j\theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$ — это комплексное число. На комплексной плоскости оно даёт **единичный вектор, повёрнутый на угол θ** : его проекция на ось Re равна $\cos\theta$, на ось Im — $\sin\theta$. Умножение на $e^{-j\theta}$ — поворот по часовой стрелке на угол θ . Поэтому $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$ — это N равномерно расставленных точек на окружности, базисные «стрелки» ДПФ, а $X[k]$ — проекция (корреляция) сигнала на такую стрелку.

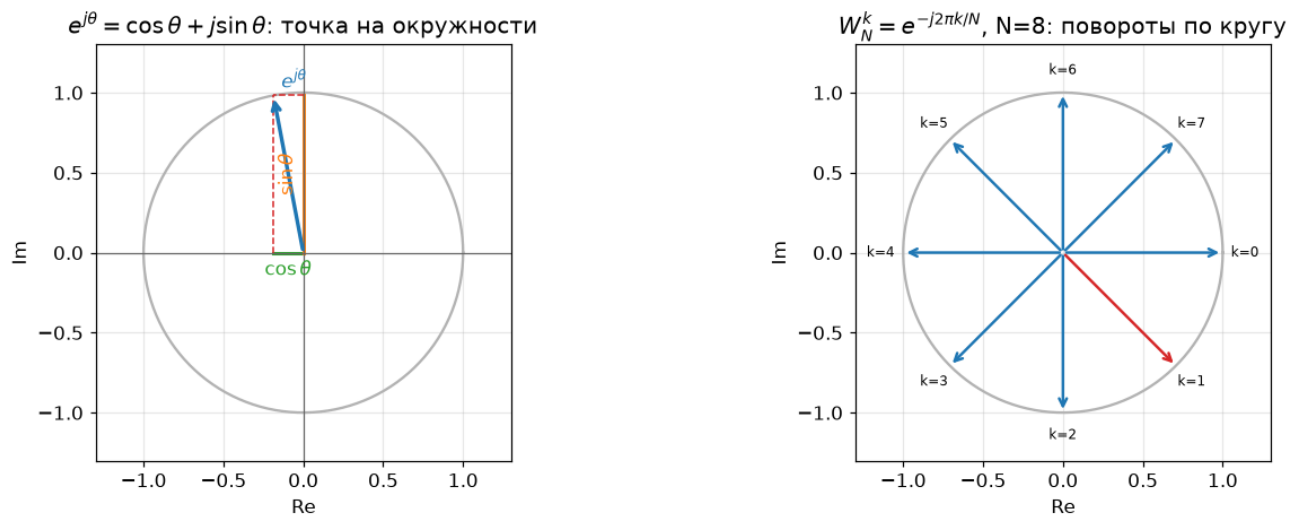


Figure 2: $e^{j\theta}$ и степени W_N на окружности

2b. Комплексное представление и примеры спектров

Как представить синус комплексно? По формуле Эйлера косинус — это сумма двух комплексных экспонент:

$$\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) / 2.$$

Значит, реальный синус $A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ даёт в спектре **две** сопряжённые линии: на $+f_0$ и $-f_0$, с амплитудами $A/2$ и фазами $\pm\varphi$. Комплексный (аналитический) сигнал $A \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ даёт **одну** линию на $+f_0$. Восстановление: $A = 2|X[k]|/N$, $\varphi = \arg X[k]$.

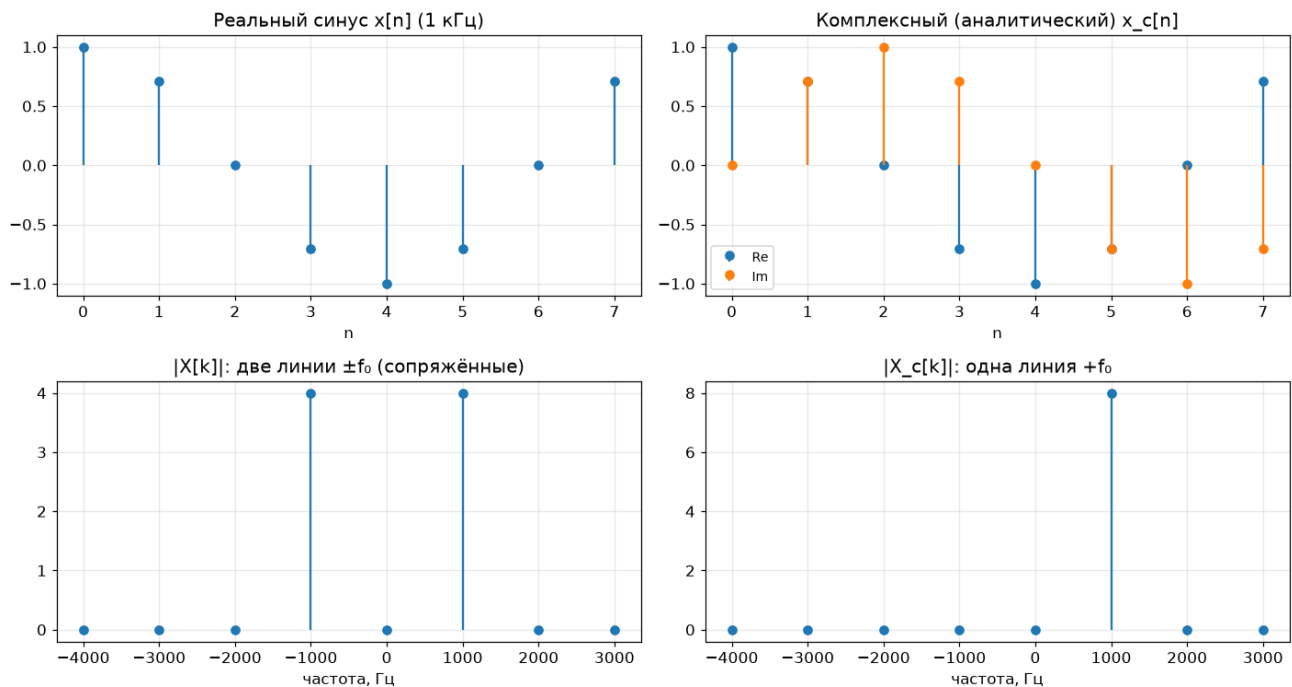


Figure 3: Комплексное представление синуса 1 кГц

Если частота **не** совпадает с бином (например, 1.25 кГц при $\Delta f = 1000$ Гц), линии «размазываются» — это **утечка**.

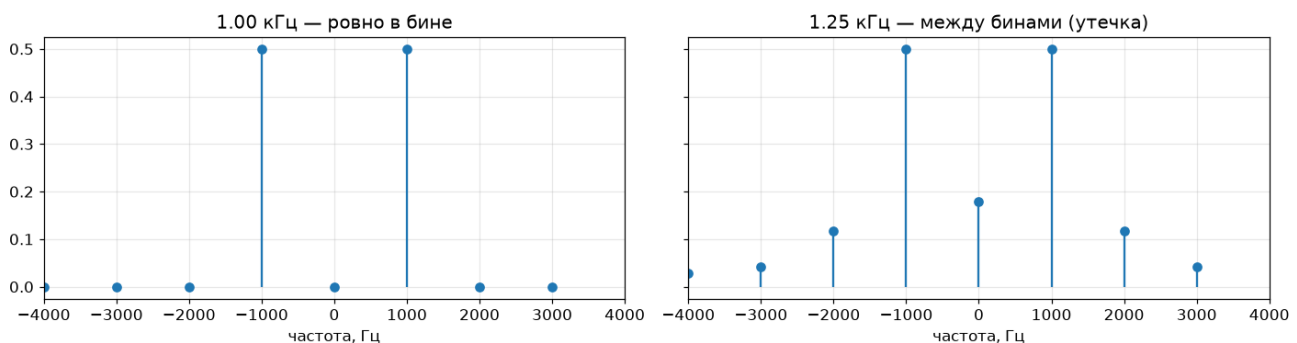


Figure 4: Ровно в бине и между бинами

Примеры периодических сигналов. Меандр и треугольник содержат только **нечётные** гармоники: у меандра амплитуды падают как $1/k$, у треугольника — как $1/k^2$ (спектр «мягче»).

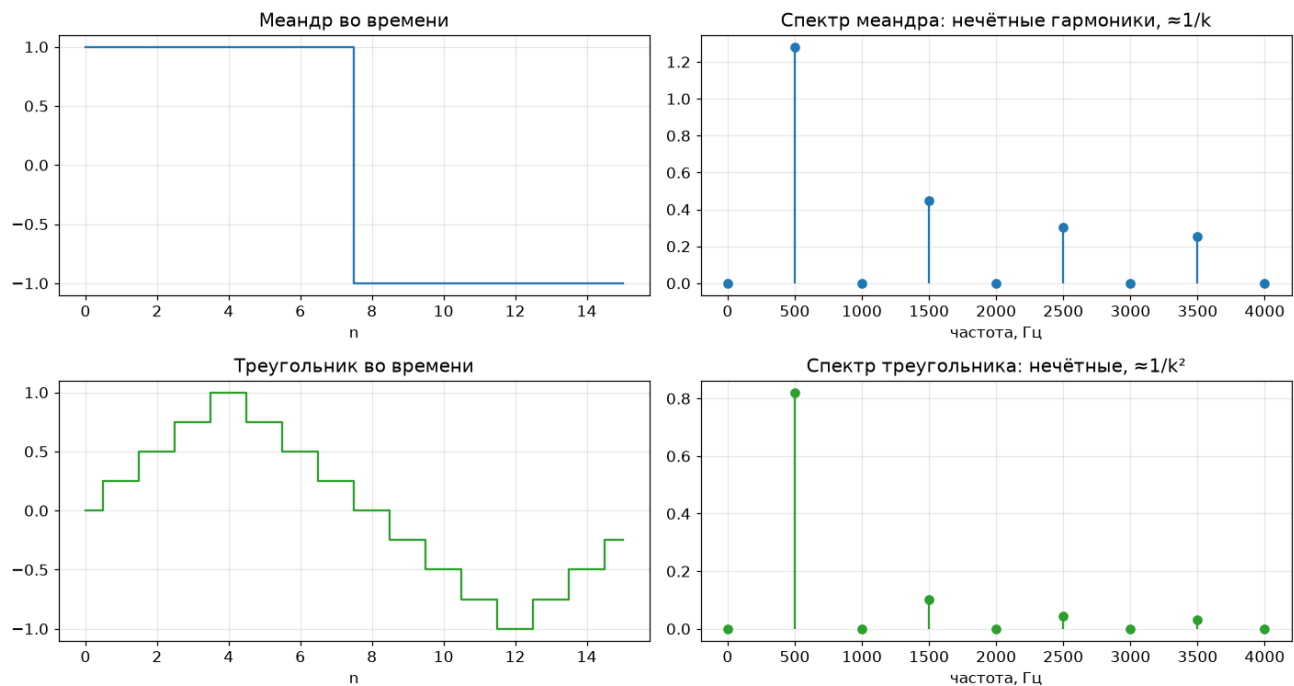


Figure 5: Спектры меандра и треугольника

3. Что означает ДПФ (инженерная сторона)

- $X[k]$ — **комплексная амплитуда** k -й частоты $f_k = k \cdot f_d / N$.
- $|X[k]|$ — амплитуда, $\arg X[k]$ — фаза составляющей.
- Ось частот задаётся функциями `pr.fft.fftfreq` (двусторонняя) и `rfftfreq` (односторонняя); амплитуду нормируют как $|X|/N$ или $2|X|/N$.

Простейший пример — косинус, частота которого **точно попадает в бин**:

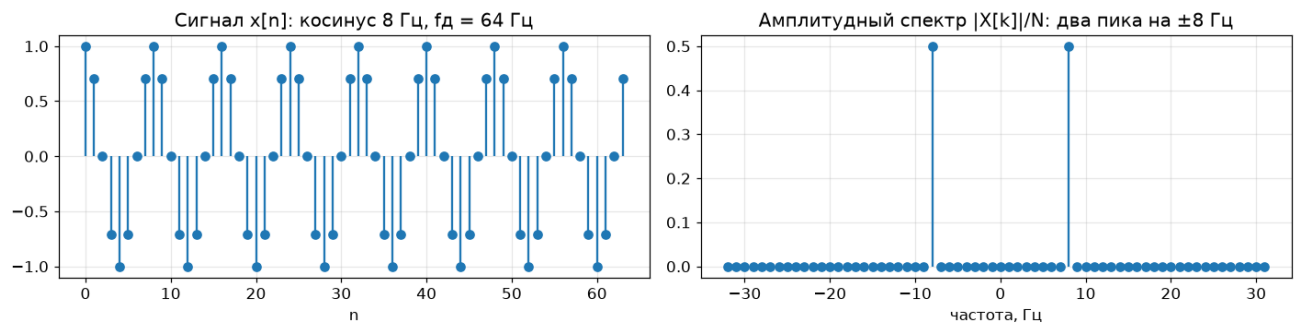


Figure 6: Однотоновый сигнал и его ДПФ

Дискретные частоты (бины). ДПФ знает сигнал только на частотах $f_k = k \cdot f_d / N$. Шаг по частоте — **разрешение** $\Delta f = f_d / N$; при длительности записи $T = N / f_d$ получаем $\Delta f = 1/T$.

4. Свойства ДПФ

- **Линейность:** $\text{ДПФ}(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \text{ДПФ}(x) + b \cdot \text{ДПФ}(y)$.

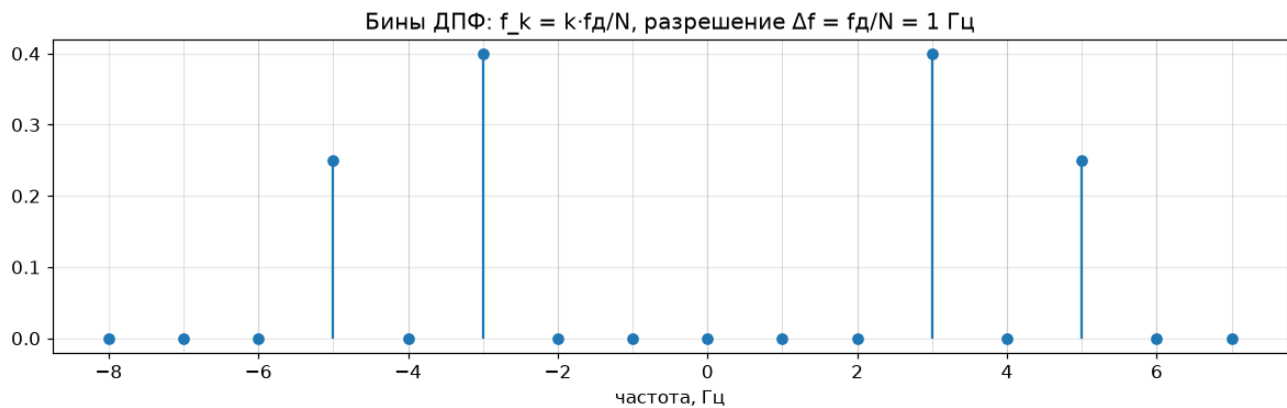


Figure 7: Сетка частот ДПФ

- **Симметрия вещественного сигнала:** $X[N-k] = \overline{X[k]}$ (модуль чётный, фаза нечётная).
- **Сдвиг во времени $\leftrightarrow$ фаза:** $x[n-n_0]$ даёт множитель $e^{-j2\pi k n_0 / N}$ (модуль не меняется, фаза линейна).
- **Круговая свёртка:** $\text{ДПФ}(x \circledast y) = \text{ДПФ}(x) \cdot \text{ДПФ}(y)$.
- **Парсеваль:** $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$.

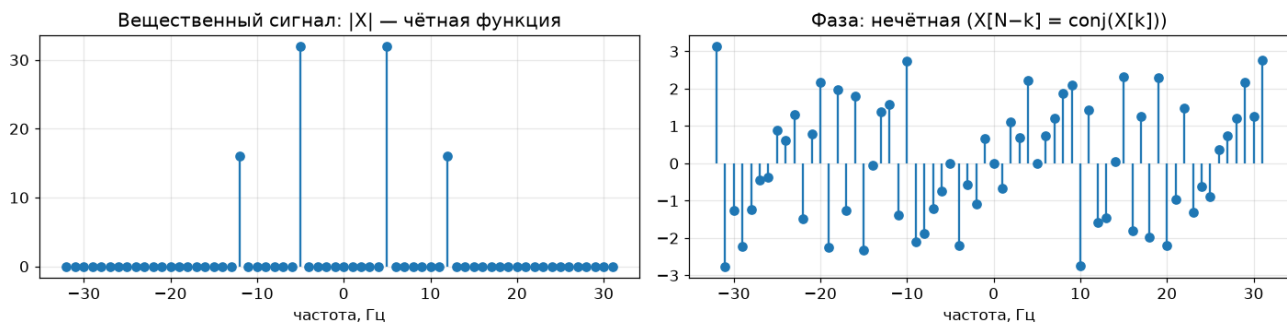


Figure 8: Симметрия вещественного спектра

Заворачивание. В круговой свёртке индексы берутся по модулю N : $y[n] = \sum x[m] \cdot h[(n-m) \bmod N]$. Хвост линейной свёртки с индексами $\geq N$ не отбрасывается, а **складывается с началом**: $y_{\text{circ}}[n] = y_{\text{lin}}[n] + y_{\text{lin}}[n+N] + \dots$. Пример $[1, 2, 3, 4] \circledast [1, 1, 1]$ при $N=4$: $y_{\text{lin}} = [1, 3, 6, 9, 7, 4]$, хвост $[7, 4]$ заворачивается и даёт $[8, 7, 6, 9]$ ($1+7=8$, $3+4=7$).

5. Утечка: когда частота между бинами

Если частота **не совпадает** с сеткой f_k , энергия «растекается» по соседним бинам — **утечка**. ДПФ показывает «холмик» вместо одной линии.

6. ДПФ реального сигнала и ось частот

Для сигнала из проекта возьмём вибрацию (база, дефект подшипника, шум), посчитаем ДПФ и переведём бины в герцы.

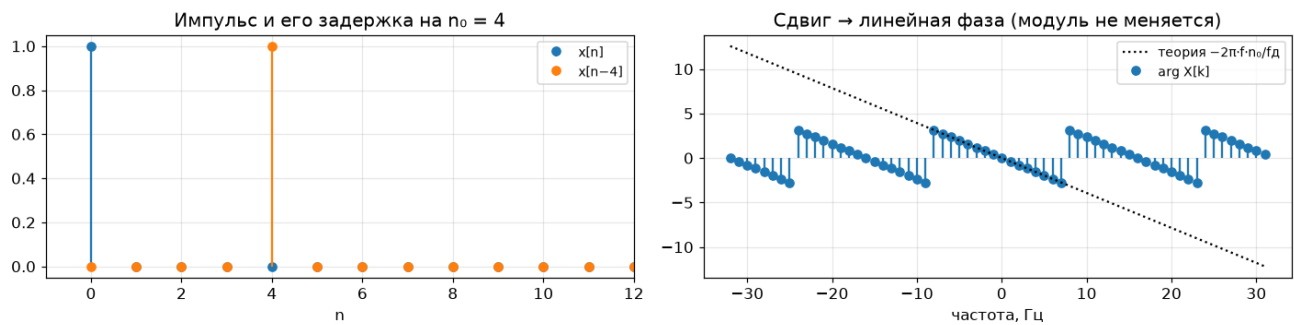


Figure 9: Сдвиг → линейная фаза

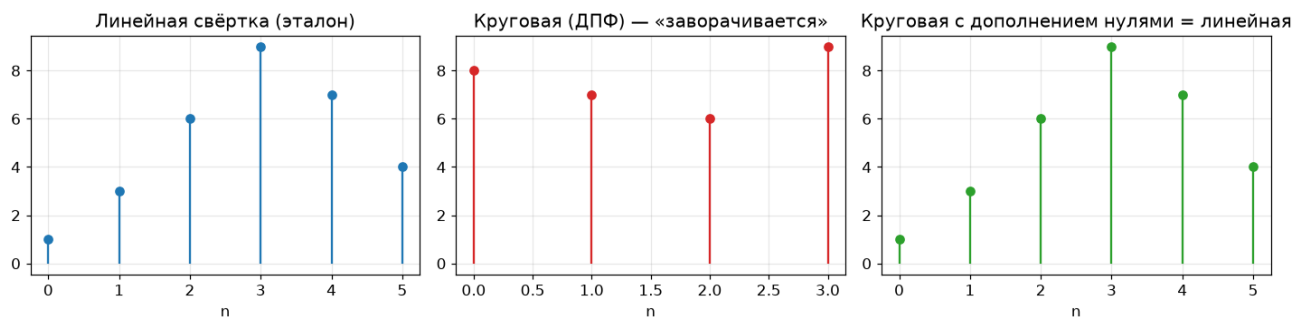


Figure 10: Круговая свёртка и её исправление

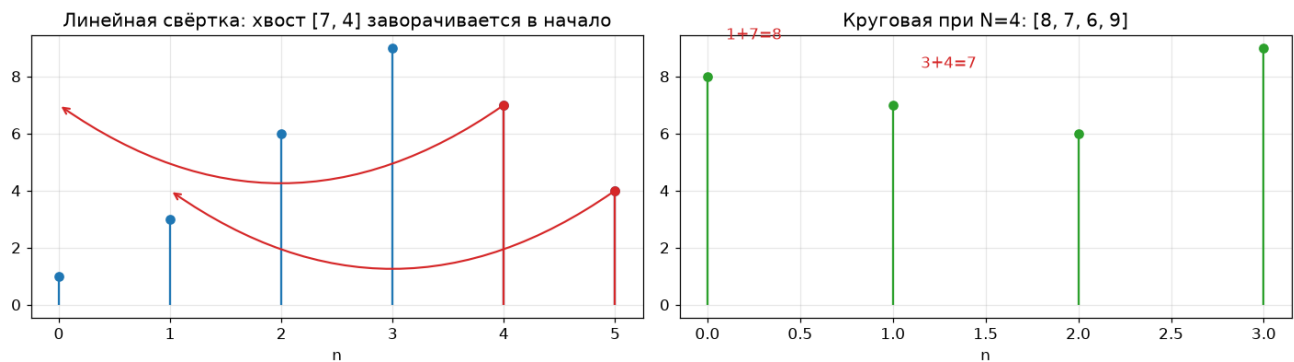


Figure 11: Заворачивание конца при круговой свёртке

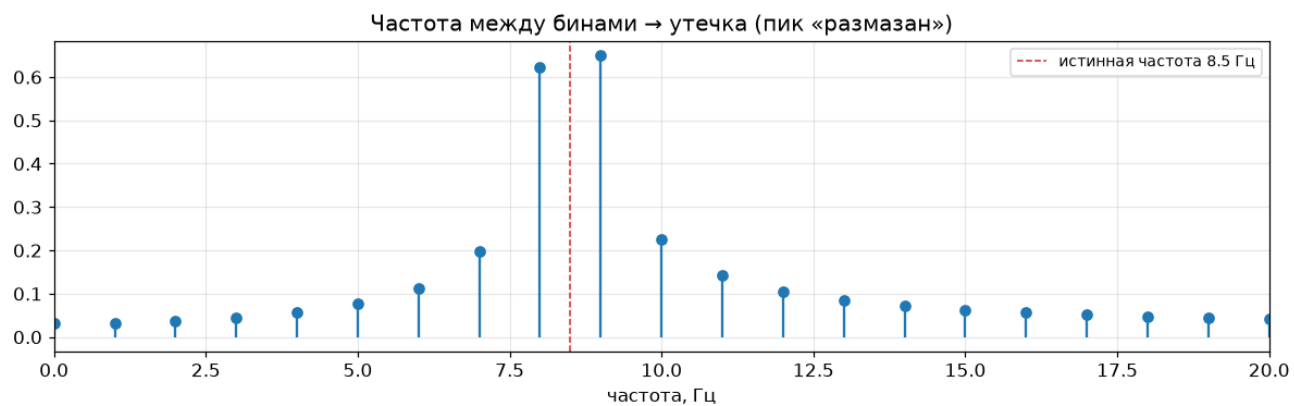


Figure 12: Утечка при частоте между бинами

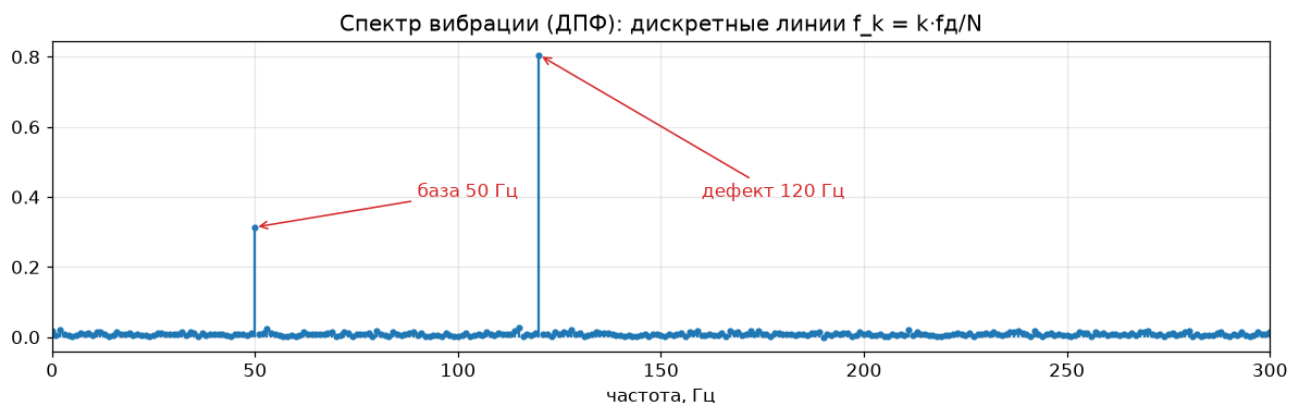


Figure 13: Спектр вибрации через ДПФ

7. Что такое БПФ и почему оно нужно

БПФ (быстрое преобразование Фурье, FFT) — **не новое преобразование**, а быстрый **алгоритм** для того же самого ДПФ. Идея «разделяй и властвуй» (Cooley–Tukey): разбить N отсчётов на **чётные** и **нечётные** и свести к двум ДПФ половинной длины; результаты соединяются «бабочкой»:

$$X[k] = E[k] + W_N^k \cdot O[k], \quad X[k + N/2] = E[k] - W_N^k \cdot O[k].$$

Для $N = 2^m$ рекурсия даёт $\log_2 N$ уровней по N операций, то есть $O(N \cdot \log_2 N)$ вместо $O(N^2)$. Для $N = 10^6$ это 10^{12} против $\approx 2 \cdot 10^7$ операций — разница в десятки тысяч раз. Поэтому считают **БПФ**, а ДПФ — его математическая основа.

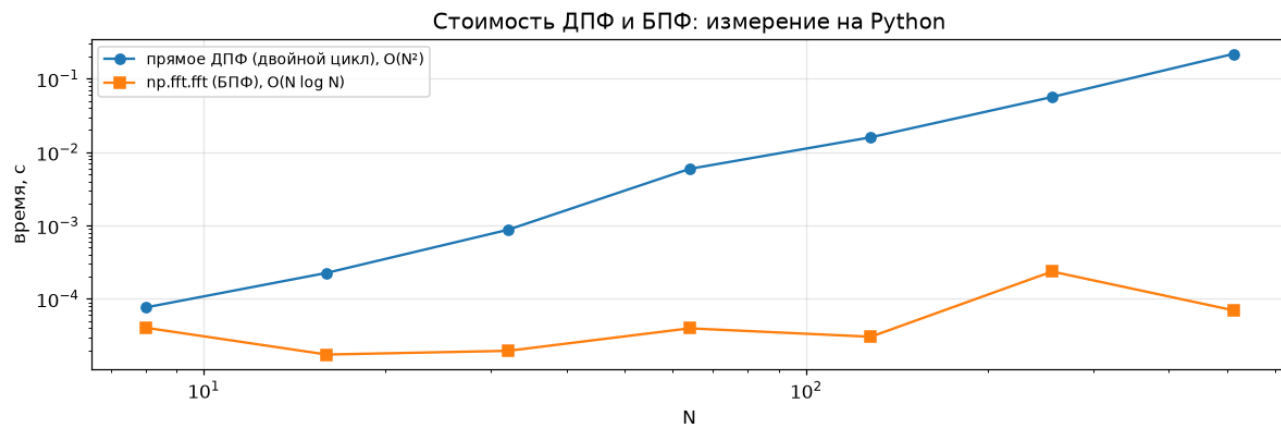


Figure 14: Стоимость ДПФ и БПФ

Сквозной проект: задание №3

1. Посчитать **ДПФ** сигнала своего проекта.
2. Построить **ось частот** (`rfftfreq`), отметить $\Delta f = f_d / N$.
3. Проверить **симметрию** для вещественного сигнала.
4. Показать **утечку** при числе отсчётов, не кратном периоду.
5. Сравнить с непрерывной теорией, где она известна.

Сдавать: ноутбук с графиками + **один** слайд-вывод.

Итоги

- **ДПФ** переводит N отсчётов в N коэффициентов: $X[k] = \sum x[n] e^{-j2\pi kn/N}$.
- Частоты дискретны: $f_k = k \cdot f_d/N$, разрешение $\Delta f = f_d/N = 1/T$.
- Свойства: линейность, симметрия, сдвиг $\leftrightarrow$ фаза, **круговая свёртка** $\leftrightarrow$ умножение, Парсеваль.
- Матричная форма $X = Wx$; обратное — через W^H/N .
- Прямое ДПФ $O(N^2) \rightarrow$ переход к **БПФ**.

Дальше: быстрое преобразование Фурье и практический спектральный анализ: окна, разрешение, усреднение.

Приложение: вывод формулы Эйлера через ряды

Разложим экспоненту в ряд Тейлора при $x = j\theta$:

$$e^{j\theta} = \sum (j\theta)^n/n! = 1 + j\theta - \theta^2/2! - j\theta^3/3! + \theta^4/4! + j\theta^5/5! - \dots$$

Степени j идут циклом $1, j, -1, -j$, поэтому члены распадаются на две группы:

- действительная: $1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \dots = \cos \theta$;
- мнимая: $\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots = \sin \theta$.

Отсюда $e^{j\theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta$ — формула Эйлера следует прямо из рядов, а не постулируется.

Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов*. — М.: Техносфера, 2012.
2. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов*. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
3. Солонина А. И. и др. *Основы цифровой обработки сигналов*. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
4. Умняшкин С. В. *Основы теории цифровой обработки сигналов*.
5. Материалы курса и RAG-ассистент по этим книгам — в папке курса.